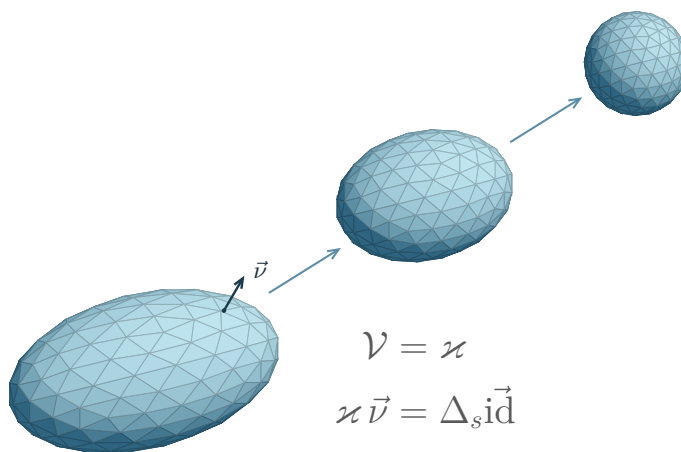


曲率驱动界面演化 的参数有限元逼近

John W. Barrett Harald Garcke

Robert Nürnberg 著



译本说明

本书译自 John W. Barrett、Harald Garcke 与 Robert Nürnberg 的综述 **Parametric finite element approximations of curvature driven interface evolutions**, 以用户提供的 arXiv:1903.09462v3 (2019 年 12 月 13 日) PDF 及 LaTeX 源码为底本。原文后发表于 *Handbook of Numerical Analysis* 第 21 卷 (2020), 第 275–423 页。

译文力求忠实于原文的数学内容, 以严谨、简洁而自然的中文表述定义、论证及方法之间的关系。全书保留原文各节的次序, 将十个一级节改列为十章; 公式、定理类环境及图的编号仍与 arXiv 底本一致, 以便对照。文后参考文献保留原来的外文著录, 便于检索。

本译本直接采用李文威《代数学方法: 卷一》的公开 AJbook 模板, 沿用其开本、章节标题、页眉及中文字体层级: 正文用宋体, 定理、定义及假设的陈述用仿宋, 强调用黑体, 证明标题另用中等字重的黑体。为保留底本的作者–年份引用及全局编号, 对模板的文献和定理接口作了适配。符号索引采用三栏的“符号, 页码”形式, 另附名词索引暨英译。

AJbook 模板及其配置文件由李文威提供, 采用 CC BY 4.0 许可, 源地址为 <https://github.com/wenweili/AIJabr-1>; 本译本的适配文件保留了署名和许可说明。模板的许可仅适用于相应代码。封面右下角为原创绘图, 以相同视角和比例表现椭球形曲面逐渐趋于球形的三个示意形态, 并在初始形态上标出外单位法向量 $\vec{\nu}$ 。模板及版式的使用不表示李文威先生参与本译本或认可其中内容。

术语同时参酌项目提供的张郁林博士论文《外蕴各向异性几何流的参数有限元方法》。曲面几何语境中, surface 译为“曲面”; 涉及能量和物理界面时, 沿用“表面能”“表面扩散”等习惯称呼。semidiscrete 与 fully discrete 分别译为“半离散”与“全离散”; equidistribution 与 equipartition 分别译为“等分布”与“均分”; mass lumping

译为“质量集中”。人名命名的算子和模型一般保留拉丁字母。

须特别留意本文的曲率约定：平均曲率是主曲率之和，其符号随选定的单位法向量而定；外法向下的球面具有负的平均曲率。因此，阅读不同文献时不宜直接套用另一种符号约定。

本译本中的译者说明均以“译注”明示。原文的结论、假设及证明与新增索引相互区分；新增索引用于检索本译本页码。原作著作权归原权利人所有，本译本不另行声明原作采用开放许可。

原文：<https://arxiv.org/abs/1903.09462v3>

版式参考：<https://www.wvli.asia/zh/docs/books/>

编译日期：2026 年 10 月 11 日

摘要

参数有限元可为曲面演化方程提供高效的数值方法。本文基于平均曲率的弱形式，介绍曲率驱动演化方程的若干计算方法。这些方法具有良好的网格性质，可避免网格节点聚并和严重不均匀的网格。讨论的对象包括平均曲率流、表面扩散、各向异性几何流、凝固、两相流、Willmore 流、Helfrich 流及生物膜。本文给出稳定性结果，并论证上述良好网格性质的成因。

AMS 主题分类 65M60, 53C44, 35K55, 65M12, 74E10, 74N05, 76D05, 92C05。

目录

译本说明	i
摘要	iii
第一章 引言	1
第二章 曲面几何	3
2.1 $\mathbb{R}^d$ 中的曲面	3
2.2 曲率	8
2.3 散度定理	13
2.4 演化曲面与输运定理	16
2.5 法向量的时间导数	23
2.6 平均曲率的时间导数	24
2.7 Gauss–Bonnet 定理	27
第三章 参数有限元	29
3.1 多面体曲面	29
3.2 稳定性估计	34
3.3 曲率逼近	37

3.4	演化多面体曲面与输运定理	40
3.5	演化多面体曲面的其他结论	43
第四章	平均曲率流	45
4.1	弱形式	46
4.2	有限元逼近	46
4.3	离散线性方程组	48
4.4	存在唯一性	50
4.5	稳定性	51
4.6	均分性质	51
4.7	其他参数方法	56
第五章	表面扩散及其他流	59
5.1	表面扩散流的性质	59
5.2	表面扩散的有限元逼近	60
5.3	半离散格式的体积守恒	61
5.4	向其他流的推广	62
5.5	抑制或诱导切向运动的逼近	65
5.6	其他参数方法	69
第六章	各向异性流	71
6.1	支配方程的推导	71
6.2	适当的弱形式	73
6.3	有限元逼近	76
6.4	求解方法与离散系统	78
6.5	半离散格式的体积守恒性	79
6.6	其他数值方法	79
第七章	体区域方程与曲面几何方程的耦合及其在晶体生长中的 应用	81
7.1	Mullins–Sekerka 问题	81
7.2	带 (动力学) Gibbs–Thomson 律的 Stefan 问题	85
7.3	单侧自由边界问题	89

7.4 其他数值方法	91
第八章 两相流	93
8.1 两相 Stokes 流	93
8.2 两相 Navier-Stokes 流	104
8.3 其他数值方法	107
第九章 Willmore 流	109
9.1 流的推导	109
9.2 Willmore 流的有限元逼近	110
9.3 Willmore 流的稳定逼近	111
9.4 具有自发曲率和面积差弹性效应的 Willmore 流	119
9.5 其他数值方法	128
第十章 生物膜	129
10.1 流体生物膜的动力学模型	129
10.2 生物膜动力学的弱形式	134
10.3 半离散有限元逼近	136
10.4 两相生物膜	140
10.5 其他数值方法	141
致谢	143
参考文献	143
符号索引	161
名词索引暨英译	163

第一章

导言

在自然科学、成像科学以及数学中，分隔空间中不同区域的界面随处可见。在许多情形下，这些界面随时间演化，而演化律中含有曲率量。界面往往带有表面能；最简单的情形，表面能就是界面的总面积。表面能通常随时间递减，而平均曲率的负值给出表面积的第一变分，因此平均曲率自然出现于界面演化问题中。最简单的此类演化是表面积的 L^2 梯度流，即平均曲率流；它将是本文的主要研究对象之一。近年来，许多应用涉及含曲率量曲面积分的表面能。例如，Willmore 泛函就是平均曲率平方的积分。涉及 Willmore 泛函第一变分的曲面演化问题尤其困难，本文亦将予以讨论。

然而，界面演化律往往将界面上的量与体区域中的量耦合起来；后者满足定义在周围区域中的偏微分方程。例如，在凝固现象中，液相与固相内满足扩散方程的温度影响界面的演化。另一些例子是由流场驱动的界面，其中流场可由 Stokes 或 Navier-Stokes 方程组确定。这些情形复杂得多，在分析和计算上均带来颇具挑战的问题。

本文讨论演化界面的参数有限元方法。首先以平均曲率流等简单几何演化方程为例，阐明主要思想；随后采用界面网格与体网格相互独立的非拟合有限元方法，将界面方程与体区域方程耦合，并以凝固现象及两相流问题为例加以说明。在介绍 Willmore 能量及相应 Willmore 流的逼近思想之后，本文最后讨论生物膜演化问题的数值逼近。关于几何偏微分方程的其他数值方法，例如水平集法、相场法及其他前沿追踪方法，读者可参阅 *Handbook of Numerical Analysis* 第 XXI、XXII 卷中的相关篇章 [Bänsch and Schmidt \(2019\)](#); [Bartels \(2019\)](#); [Bonito et al. \(2019\)](#); [Du and Feng \(2019\)](#); [Saye and Sethian \(2019\)](#); [Turek and Mierka \(2019\)](#)，以及综述 [Deckelnick et al. \(2005a\)](#)。

第二章 曲面几何

本章回顾有关曲面的基本事实，为后文构造由曲率驱动的超曲面流数值算法作准备。我们将定义曲面、面上的微分算子及重要的曲率量，并陈述超面上的散度定理。这些内容的详细论述可参阅 [do Carmo \(1976\)](#); [Deckelnick et al. \(2005a\)](#); [Kühnel \(2015\)](#); [Walker \(2015\)](#)。熟悉这些概念的读者可略过本章。

2.1 $\mathbb{R}^d$ 中的曲面

首先定义曲面的概念。本节及下文均设 $d \geq 2$ 。

定义 1

- (i) 对于 $0 \leq n \leq d$ 和 $k \geq 1$ ，若对每个点 $\vec{p} \in \Gamma$ ，都存在 $\vec{p}$ 的开邻域 $V \subset \mathbb{R}^d$ 和双射的 C^k 映射 $\vec{\mathfrak{x}}: U \rightarrow V \cap \Gamma$ ，其中 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为连通开集，且 $\vec{\mathfrak{x}}$ 的 Jacobian 矩阵 $\nabla \vec{\mathfrak{x}} = (\partial_1 \vec{\mathfrak{x}}, \dots, \partial_n \vec{\mathfrak{x}}): U \rightarrow \mathbb{R}^{d \times n}$ 在 U 上满秩，则称子集 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 为 n 维 C^k 曲面。
- (ii) 称映射 $\vec{\mathfrak{x}}$ 为 Γ 的局部参数化。
- (iii) 若 $n = d - 1$ ，则称 Γ 为超曲面。

下面定义超曲面上映射的可微性。

定义 2 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 为 n 维 C^k 曲面。若对所有 C^k 参数化 $\vec{\mathfrak{x}}: U \rightarrow \Gamma$ ，复合函数 $f \circ \vec{\mathfrak{x}}: U \rightarrow \mathbb{R}$ 均属 C^k 类，则称函数 $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^k 函数，记为 $f \in C^k(\Gamma)$ 。

借助局部参数化，可以定义切空间的一组基。

定义 3 设 Γ 为 n 维 C^1 曲面, 具有局部参数化 $\vec{\mathfrak{X}}: U \rightarrow \mathbb{R}^d$. 对 $\vec{p} \in \Gamma$, 取满足 $\vec{p} = \vec{\mathfrak{X}}(\vec{u})$ 的 $\vec{u} \in U$. 向量

$$\vec{\partial}_1 = (\partial_1 \vec{\mathfrak{X}})(\vec{u}), \dots, \vec{\partial}_n = (\partial_n \vec{\mathfrak{X}})(\vec{u})$$

线性无关, 张成一个 n 维空间, 称为**切空间**, 记为

$$T_{\vec{p}}\Gamma = \text{span}\{\vec{\partial}_1, \dots, \vec{\partial}_n\}.$$

它在 $\mathbb{R}^d$ 中的正交补 $N_{\vec{p}}\Gamma = (T_{\vec{p}}\Gamma)^\perp$ 称为 Γ 在 $\vec{p}$ 处的**法空间**.

我们主要关心有向超曲面, 现给出其定义.

定义 4 若超曲面 Γ 上存在连续法向量场 $\vec{\nu}: \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$, 使所有 $\vec{p} \in \Gamma$ 均满足 $\vec{\nu}(\vec{p}) \in N_{\vec{p}}\Gamma$, 则称该超曲面**可定向**, 其中 $\mathbb{S}^{d-1}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的 $(d-1)$ 维球面.

以下曲面 Γ 上的微分算子将被频繁使用.

定义 5 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 为 n 维 C^1 曲面, $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $\vec{f}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为 C^1 函数.

(i) 对 $\vec{p} \in \Gamma$ 和 $\vec{\tau} \in T_{\vec{p}}\Gamma$, 定义**方向导数**为

$$(\partial_{\vec{\tau}} f)(\vec{p}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\vec{y}(\varepsilon)) - f(\vec{y}(0))}{\varepsilon} = (f \circ \vec{y})'(0),$$

其中 $\vec{y}: (-1, 1) \rightarrow \Gamma$ 参数化 Γ 上的一条曲线, 满足 $\vec{y}(0) = \vec{p}$ 和 $\vec{y}'(0) = \vec{\tau}$.

(ii) f 在 Γ 上的点 $\vec{p} \in \Gamma$ 处的**曲面梯度**定义为

$$(\nabla_s f)(\vec{p}) = \sum_{i=1}^n (\partial_{\vec{\tau}_i} f)(\vec{p}) \vec{\tau}_i,$$

其中 $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n\}$ 为 $T_{\vec{p}}\Gamma$ 的一组标准正交基.

(iii) $\vec{f}$ 在点 $\vec{p} \in \Gamma$ 处的**曲面散度**定义为

$$(\nabla_s \cdot \vec{f})(\vec{p}) = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i \cdot (\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{f})(\vec{p}),$$

其中 $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n\}$ 仍为 $T_{\vec{p}}\Gamma$ 的一组标准正交基.

(iv) $\vec{f}$ 在点 $\vec{p} \in \Gamma$ 处的**曲面 Jacobian 矩阵**定义为

$$(\nabla_s \vec{f})(\vec{p}) = \sum_{i=1}^n (\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{f})(\vec{p}) \otimes \vec{\tau}_i,$$

其中 $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n\}$ 仍为 $T_{\vec{p}}\Gamma$ 的一组标准正交基.

- (v) 若 Γ 为 C^2 曲面, 且 $f \in C^2(\Gamma)$, 则分别定义 f 在 Γ 上的 **Laplace–Beltrami 算子**与**曲面 Hessian 矩阵**为

$$\Delta_s f = \nabla_s \cdot (\nabla_s f) \quad \text{和} \quad \nabla_s^2 f = \nabla_s (\nabla_s f),$$

- (vi) 对于 C^2 曲面 Γ , $\vec{f} \in [C^2(\Gamma)]^d$ 的 Laplace–Beltrami 算子按分量定义, 即 $(\Delta_s \vec{f}) \cdot \vec{e}_i = \Delta_s (\vec{f} \cdot \vec{e}_i)$, $i = 1, \dots, d$ 。本节及下文以 $\vec{e}_i$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的第 i 个标准基向量。

- (vii) 定义广义对称化曲面 Jacobian 矩阵

$$D_s(\vec{f}) = \frac{1}{2} P_\Gamma (\nabla_s \vec{f} + (\nabla_s \vec{f})^\top) P_\Gamma \quad \text{在 } \Gamma,$$

其中 P_Γ 为到 Γ 的切空间上的正交投影。换言之, 对于 $T_{\vec{p}}\Gamma$ 的一组标准正交基 $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n\}$, 有

$$P_\Gamma(\vec{p}) = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i \otimes \vec{\tau}_i \quad (1)$$

- (viii) 张量 $f \in [C^1(\Gamma)]^{d \times d}$ 的曲面散度通过 Γ 上的关系 $(\nabla_s \cdot f) \cdot \vec{e}_i = \nabla_s \cdot (f^\top \vec{e}_i)$ 定义, 其中 $i = 1, \dots, d$ 。

注记 6

- (i) 容易验证, 定义 5(i) 与参数化 $\vec{g}$ 的选取无关。曲线视作 1 维曲面时, 始终假设其参数化 $\vec{g}$ 是正则的, 即 $\vec{g}$ 连续可微且处处满足 $\vec{g}' \neq \vec{0}$, 参见定义 1。曲线是正则参数化在参数变换所给等价关系下的一个等价类, 参见例如 Kühnel (2015, p. 8)。为简便起见, 下文也常将参数化 $\vec{g}$ 称为曲线。
- (ii) 容易验证, 定义 5(ii)、5(iii) 和 5(iv) 与 $T_{\vec{p}}\Gamma$ 的标准正交基的选取无关。
- (iii) 对于 $\vec{p} \in \Gamma$, 有

$$\begin{aligned} (\nabla_s \vec{f})(\vec{p}) \vec{\tau} &= (\partial_{\vec{\tau}} \vec{f})(\vec{p}) \quad \forall \vec{\tau} \in T_{\vec{p}}\Gamma \\ \text{和} \quad (\nabla_s \vec{f})(\vec{p}) \vec{v} &= \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in N_{\vec{p}}\Gamma. \end{aligned}$$

此外, $\nabla_s \vec{f}$ 的第 i 行是 $\vec{f}$ 的第 i 个分量的曲面梯度, 即 $(\nabla_s \vec{f})^\top \vec{e}_i = \nabla_s (\vec{f} \cdot \vec{e}_i)$, $i = 1, \dots, d$ 。

- (iv) 注意到定义 5(vii) 中的第二个投影 P_Γ 保证

$$(D_s(\vec{f}))(\vec{p}) \vec{v} = \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in N_{\vec{p}}\Gamma, \vec{p} \in \Gamma,$$

这与 (iii) 类似。第一个投影则保证 $(D_s(\vec{f}))(\vec{p})$ 对称。

(v) 由定义 5(ii)、5(iv) 及 (1) 直接得到

$$\nabla_s f = P_\Gamma \nabla_s f \quad \text{和} \quad \nabla_s \vec{f} = (\nabla_s \vec{f}) P_\Gamma \quad \text{在 } \Gamma.$$

(vi) 若 Γ 为超曲面, 则有

$$P_\Gamma = \text{Id} - \vec{\nu} \otimes \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma,$$

其中, 对于 $\vec{p} \in \Gamma$, $\vec{\nu}(p)$ 表示 $N_{\vec{p}}\Gamma$ 中的一个单位向量。

以下乘积法则与恒等式成立。

引理 7 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 为 n 维 C^1 曲面, $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{f}, \vec{g}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^d$ 和 $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ 为 C^1 函数。则有:

(i)

$$\nabla_s \cdot (f \vec{g}) = \vec{g} \cdot \nabla_s f + f \nabla_s \cdot \vec{g} \quad \text{在 } \Gamma,$$

(ii)

$$\nabla_s (\vec{f} \cdot \vec{g}) = (\nabla_s \vec{f})^\top \vec{g} + (\nabla_s \vec{g})^\top \vec{f} \quad \text{在 } \Gamma,$$

(iii)

$$\nabla_s (f \vec{g}) = \vec{g} \otimes \nabla_s f + f \nabla_s \vec{g} \quad \text{在 } \Gamma,$$

(iv)

$$\nabla_s \cdot (f^\top \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\nabla_s \cdot f) + f : \nabla_s \vec{g} \quad \text{在 } \Gamma,$$

(v) 以及

$$\text{tr}(\nabla_s \vec{f}) = \nabla_s \cdot \vec{f} \quad \text{在 } \Gamma.$$

证明 (i)–(iv) 与平直情形的相应公式完全类似, 由定义 5 易得。

(v) 利用迹在基变换下不变这一事实, 由注记 6(iii) 及定义 5(iii) 可得, 对于 $\vec{p} \in \Gamma$, 有

$$\text{tr} \left((\nabla_s \vec{f})(\vec{p}) \right) = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i \cdot (\nabla_s \vec{f})(\vec{p}) \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i \cdot (\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{f})(\vec{p}) = (\nabla_s \cdot \vec{f})(\vec{p}),$$

其中 $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n\}$ 为 $T_{\vec{p}}\Gamma$ 的一组标准正交基。□

采用定义 5 中微分算子的其他表示形式往往更为方便。

注记 8

(i) 对于局部参数化 $\vec{x}: U \rightarrow \Gamma$, 可将第一基本形式 (或称度量张量) $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ 定义为

$$g_{ij} = \vec{\partial}_i \cdot \vec{\partial}_j = \partial_i \vec{x} \cdot \partial_j \vec{x},$$

通过简单的线性代数运算可得

$$\begin{aligned} (\nabla_s f) \circ \vec{x} &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \partial_i (f \circ \vec{x}) \vec{\partial}_j \quad \text{于 } U, \\ (\nabla_s \cdot \vec{f}) \circ \vec{x} &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \partial_i (\vec{f} \circ \vec{x}) \cdot \vec{\partial}_j \quad \text{于 } U, \end{aligned}$$

其中 $(g^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ 为 $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ 的逆矩阵。此外，有

$$(\Delta_s f) \circ \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j (f \circ \vec{x})) \quad \text{于 } U,$$

其中

$$g = \det((g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}) \quad (2)$$

是局部面积元的平方，参见 [Amann and Escher \(2009, §XI.6\)](#)。

- (ii) 以 $\nabla_s = (\partial_{s_1}, \dots, \partial_{s_d})^\top$ 表示 Γ 上的曲面梯度，则有 $\nabla_s \cdot \vec{f} = \sum_{i=1}^d \partial_{s_i} (\vec{f} \cdot \vec{e}_i)$ ， $\nabla_s \vec{f} = (\partial_{s_j} \vec{f} \cdot \vec{e}_i)_{i,j=1}^d$ 及 $\nabla_s^2 f = (\partial_{s_j} \partial_{s_i} f)_{i,j=1}^d$ 。此外，由引理 7(v) 可知，Laplace–Beltrami 算子满足 $\Delta_s = \sum_{i=1}^d \partial_{s_i}^2$ 。
- (iii) 若 Γ 为具有法向量场 $\vec{\nu}$ 的可定向超曲面，将函数 f 和 $\vec{f}$ 延拓至 Γ 的一个开邻域，便得到公式

$$\nabla_s f = \nabla f - (\nabla f \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu} \quad \text{和} \quad \nabla_s \cdot \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} - ((\nabla \vec{f}) \cdot \vec{\nu}) \cdot \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma,$$

其中 ∇ 和 $\nabla \cdot$ 分别为 $\mathbb{R}^d$ 中的梯度与散度。这些恒等式由定义 5(ii)、(iii) 以及利用标准正交基对 ∇f 和 $\nabla \cdot \vec{f}$ 的表示直接得到。

引理 9 设 Γ 为 C^1 超曲面，则恒等映射 id 满足下列性质。

(i)

$$\nabla_s \vec{\text{id}} = P_\Gamma \quad \text{在 } \Gamma.$$

(ii) 对于 $\vec{f} \in [C^1(\Gamma)]^d$ ，有

$$\nabla_s \vec{\text{id}} : \nabla_s \vec{f} = \nabla_s \cdot \vec{f} \quad \text{在 } \Gamma,$$

其中 $A : B = \text{tr}(A^\top B)$ 表示矩阵 A 与 B 的 Hilbert–Schmidt 内积。

(iii) 若 Γ 为具有法向量场 $\vec{\nu}$ 的可定向 C^2 曲面，则

$$\Delta_s \vec{\text{id}} = -(\nabla_s \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma.$$

证明 (i) 由定义 5(iv)、5(i) 及 (1) 可得结论。

(ii) 由 (i)、注记 6(iii) 和引理 7(v) 得 $\nabla_s \text{id} : \nabla_s \vec{f} = \text{tr}(\nabla_s \vec{f}) = \nabla_s \cdot \vec{f}$ 。

(iii) 利用注记 8(iii)，并回顾定义 5(vi)、(v)，可算得对于 $i = 1, \dots, d$ ，有

$$\begin{aligned} (\Delta_s \text{id}) \cdot \vec{e}_i &= \Delta_s (\text{id} \cdot \vec{e}_i) = \nabla_s \cdot [\nabla_s (\text{id} \cdot \vec{e}_i)] = \nabla_s \cdot [\vec{e}_i - (\vec{e}_i \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu}] \\ &= -\nabla_s \cdot [(\vec{\nu} \cdot \vec{e}_i) \vec{\nu}] = -(\vec{\nu} \cdot \vec{e}_i) \nabla_s \cdot \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma, \end{aligned}$$

这里用到了 $\nabla_s (\vec{\nu} \cdot \vec{e}_i)$ 与 $\vec{\nu}$ 正交。 □

2.2 曲率

下面定义后文所需的基本曲率量。

定义 10 设 Γ 为具有法向量场 $\vec{\nu}$ 的可定向 C^2 超曲面。

(i) $\vec{p} \in \Gamma$ 处的 **Weingarten 映射** 定义为

$$W_{\vec{p}} : T_{\vec{p}}\Gamma \rightarrow T_{\vec{p}}\Gamma, \quad W_{\vec{p}}(\vec{\tau}) = -(\partial_{\vec{\tau}} \vec{\nu})(\vec{p}).$$

(ii) 相应的双线性形式称为 **第二基本形式**，由下式给出：

$$\mathbb{I}_{\vec{p}}(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) = W_{\vec{p}}(\vec{\tau}_1) \cdot \vec{\tau}_2 = -(\partial_{\vec{\tau}_1} \vec{\nu})(\vec{p}) \cdot \vec{\tau}_2$$

其中 $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2 \in T_{\vec{p}}\Gamma$ 、 $\vec{p} \in \Gamma$ 任意。可以证明 $W_{\vec{p}}$ 自伴，从而 $\mathbb{I}_{\vec{p}}$ 对称，参见例如 [Kühnel \(2015, §3.9\)](#)。因此， $T_{\vec{p}}\Gamma$ 存在一组标准正交基 $\{\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_{d-1}\}$ ，由 $W_{\vec{p}}$ 的特征向量组成，相应特征值为 $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}$ 。

定义 11

(i) 称 $W_{\vec{p}}$ 的特征值 $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}$ 为 Γ 在 $\vec{p}$ 处的 **主曲率**。

(ii) Γ 在 $\vec{p}$ 处的 **平均曲率** κ 定义为 $W_{\vec{p}}$ 的迹，即

$$\kappa(\vec{p}) = \text{tr } W_{\vec{p}} = \kappa_1 + \dots + \kappa_{d-1}.$$

(iii) Γ 在 $\vec{p}$ 处的 **平均曲率向量** $\vec{\kappa}$ 定义为

$$\vec{\kappa}(\vec{p}) = \kappa(\vec{p}) \vec{\nu}(\vec{p}).$$

(iv) 当 $d = 3$ 时, $\vec{p}$ 处的 **Gauss 曲率** $\mathcal{K}$ 为 $W_{\vec{p}}$ 的行列式, 即主曲率之积。因此定义

$$\mathcal{K}(\vec{p}) = \det W_{\vec{p}} = \kappa_1 \kappa_2.$$

引理 12 设 Γ 为具有法向量场 $\vec{\nu}$ 的可定向 C^2 超曲面。对于 $\vec{p} \in \Gamma$, Jacobian 矩阵 $(\nabla_s \vec{\nu})(\vec{p})$ 诱导从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}^d$ 的自伴线性映射, 其在 $T_{\vec{p}}\Gamma$ 上的限制为 $-W_{\vec{p}}$, 并将 $N_{\vec{p}}\Gamma$ 映为零。因此有下列性质:

(i)

$$(\nabla_s \vec{\nu})^\top \vec{\nu} = (\nabla_s \vec{\nu}) \vec{\nu} = \vec{0} \quad \text{在 } \Gamma,$$

(ii)

$$(\nabla_s \vec{\nu})^\top = \nabla_s \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma,$$

(iii)

$$\kappa = -\operatorname{tr}(\nabla_s \vec{\nu}) \quad \text{在 } \Gamma,$$

(iv) 以及

$$|\nabla_s \vec{\nu}|^2 = \nabla_s \vec{\nu} : \nabla_s \vec{\nu} = \kappa_1^2 + \cdots + \kappa_{d-1}^2 \quad \text{在 } \Gamma.$$

证明 设 $\vec{p} \in \Gamma$ 。由注记 6(iii) 及定义 10 可知, 对所有 $\vec{\tau} \in T_{\vec{p}}\Gamma$ 均有 $W_{\vec{p}}(\vec{\tau}) = -(\nabla_s \vec{\nu})(\vec{p}) \vec{\tau} = -((\nabla_s \vec{\nu})(\vec{p}))^\top \vec{\tau}$ 。此外, 记 $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_d)^\top$; 由定义 5(iv), $(\nabla_s \vec{\nu})^\top$ 的第 i 列为 $\nabla_s \nu_i$, 因而

$$(\nabla_s \vec{\nu})^\top \vec{\nu} = \sum_{i=1}^d \nu_i \nabla_s \nu_i = \frac{1}{2} \nabla_s |\vec{\nu}|^2 = 0.$$

结合注记 6(iii) 得 $(\nabla_s \vec{\nu})(\vec{p}) \vec{\nu} = ((\nabla_s \vec{\nu})(\vec{p}))^\top \vec{\nu} = \vec{0}$, 故 $(\nabla_s \vec{\nu})(\vec{p})$ 诱导的线性映射自伴。这便证明了 (i) 和 (ii)。再设 $\{\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_{d-1}\}$ 为 $T_{\vec{p}}\Gamma$ 的一组标准正交基, 由 $W_{\vec{p}}$ 的特征向量组成, 相应特征值为 $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}$ 。则 $\{\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_{d-1}, \vec{\nu}(\vec{p})\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一组标准正交基, 由 $(\nabla_s \vec{\nu})(\vec{p})$ 的特征向量组成, 相应特征值为 $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}, 0^1$ 。由此及定义 11(ii) 可得 (iii); (iv) 亦随之成立。□

下一个引理表明, 平均曲率 κ 的符号取决于单位法向量 $\vec{\nu}$ 的选取, 而平均曲率向量 $\vec{\kappa}$ 在法向量反向时保持不变。

引理 13 设 Γ 为具有法向量场 $\vec{\nu}$ 的可定向 C^2 超曲面。平均曲率及平均曲率向量满足以下公式。

(i) 平均曲率满足

$$\kappa = -\nabla_s \cdot \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma.$$

¹译注: 底本此列特征值的符号与前述切空间上的关系 $\nabla_s \vec{\nu} = -W$ 相反; 按本文 Weingarten 映射的约定, 应为 $-\kappa_1, \dots, -\kappa_{d-1}, 0$ 。其平方和的后续结论不受影响。

(ii) 平均曲率向量满足

$$\vec{\kappa} = \kappa \vec{\nu} = \Delta_s \vec{\text{id}} \quad \text{在 } \Gamma.$$

证明 (i) 由引理 12(iii) 和引理 7(v) 可得。

(ii) 由 (i)、定义 11(iii) 及引理 9(iii) 直接得到结论。 $\square$

引理 14 设 Γ 为具有法向量场 $\vec{\nu}$ 的可定向 C^2 超曲面。设 $\vec{f} \in [C^1(\Gamma)]^d$ ，并在 Γ 上令 $\vec{f}_T = P_\Gamma \vec{f}$ 。则有

(i)

$$\nabla_s \cdot \vec{f} = -(\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \kappa + \nabla_s \cdot \vec{f}_T \quad \text{在 } \Gamma,$$

(ii)

$$\nabla_s \vec{f} = (\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \nabla_s \vec{\nu} + \vec{\nu} \otimes \nabla_s (\vec{f} \cdot \vec{\nu}) + \nabla_s \vec{f}_T \quad \text{在 } \Gamma,$$

(iii)

$$D_s(\vec{f}) = (\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \nabla_s \vec{\nu} + \frac{1}{2} (P_\Gamma \nabla_s \vec{f}_T + (\nabla_s \vec{f}_T)^\top P_\Gamma) \quad \text{在 } \Gamma.$$

证明 (i) 利用引理 7(i)、定义 5(ii) 以及引理 13(i)，可算得

$$\nabla_s \cdot \vec{f} = \nabla_s \cdot ((\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu}) + \nabla_s \cdot \vec{f}_T = (\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \nabla_s \cdot \vec{\nu} + \nabla_s \cdot \vec{f}_T = -(\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \kappa + \nabla_s \cdot \vec{f}_T.$$

(ii) 类似地，由引理 7(iii) 可得

$$\nabla_s \vec{f} = \nabla_s ((\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu}) + \nabla_s \vec{f}_T = (\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \nabla_s \vec{\nu} + \vec{\nu} \otimes \nabla_s (\vec{f} \cdot \vec{\nu}) + \nabla_s \vec{f}_T.$$

(iii) 所需结论直接由 (ii)²、定义 5(iv)、5(vii) 以及 $\nabla_s \vec{\nu}$ 是将切向量映为切向量的对称映射这一事实得到，参见引理 12。 $\square$

推导某些公式时，将定义在超曲面 Γ 上的函数延拓至 Γ 的邻域往往有助于计算。这样便可利用 $\mathbb{R}^d$ 中的微积分计算曲面上的量，参见注记 8(iii)。设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 为紧的、无边界的可定向 C^2 超曲面，具有法向量场 $\vec{\nu}$ 。对于 $\delta > 0$ ，定义 Γ 的管状邻域

$$\mathcal{N}_\delta = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^d : \vec{z} = \vec{p} + \eta \vec{\nu}(\vec{p}), \vec{p} \in \Gamma, |\eta| < \delta\}$$

Gilbarg and Trudinger (1983, Appendix 14.6) 证明，当 δ 足够小时， $\vec{z} \in \mathcal{N}_\delta$ 与 $(\vec{p}, \eta) \in \Gamma \times (-\delta, \delta)$ 之间存在双射关系。因此可定义函数 $\vec{\Pi}_\Gamma(\vec{z}) = \vec{p}$ 和 $d_\Gamma(\vec{z}) = \eta$ 。其中 $|d_\Gamma(\vec{z})|$ 为 $\vec{z}$ 到 Γ 的距离；当 $\vec{z}$ 位于 $\vec{\nu}$ 所指的一侧时， $d_\Gamma(\vec{z})$ 为正，否则为负。称 d_Γ 为到 Γ

²译注：底本此处误指后文的速度分解公式，现改指本引理的第二式。

的有符号距离函数； $\vec{\Pi}_\Gamma(\vec{z})$ 则是 $\vec{z}$ 到 Γ 的投影，即

$$\vec{\Pi}_\Gamma(\vec{z}) = \arg \min_{\vec{y} \in \Gamma} |\vec{y} - \vec{z}|.$$

为供后文使用，回顾 [Gilbarg and Trudinger \(1983, Appendix 14.6\)](#) 中的结论：当 δ 足够小时，有

$$d_\Gamma \in C^2(\mathcal{N}_\delta). \quad (3a)$$

此外还成立

$$\nabla d_\Gamma = \vec{\nu} \circ \vec{\Pi}_\Gamma \quad \Rightarrow \quad |\nabla d_\Gamma| = 1 \quad \text{于 } \mathcal{N}_\delta, \quad (3b)$$

后者可如下证明。显然有

$$\text{id} = \vec{\Pi}_\Gamma + d_\Gamma \vec{\nu} \circ \vec{\Pi}_\Gamma \quad \text{和} \quad d_\Gamma = (\text{id} - \vec{\Pi}_\Gamma) \cdot (\vec{\nu} \circ \vec{\Pi}_\Gamma) \quad \text{于 } \mathcal{N}_\delta.$$

对第二个恒等式求导，并利用第一个恒等式，可得对于 $k = 1, \dots, d$ ，有

$$\begin{aligned} \partial_k d_\Gamma &= (\vec{e}_k - \partial_k \vec{\Pi}_\Gamma) \cdot (\vec{\nu} \circ \vec{\Pi}_\Gamma) - (\text{id} - \vec{\Pi}_\Gamma) \cdot \partial_k (\vec{\nu} \circ \vec{\Pi}_\Gamma) \\ &= \vec{e}_k \cdot \vec{\nu} \circ \vec{\Pi}_\Gamma - d_\Gamma (\vec{\nu} \circ \vec{\Pi}_\Gamma) \cdot \partial_k (\vec{\nu} \circ \vec{\Pi}_\Gamma) \\ &= \vec{e}_k \cdot \vec{\nu} \circ \vec{\Pi}_\Gamma - d_\Gamma \frac{1}{2} \partial_k \left| \vec{\nu} \circ \vec{\Pi}_\Gamma \right|^2 = \vec{e}_k \cdot \vec{\nu} \circ \vec{\Pi}_\Gamma \quad \text{于 } \mathcal{N}_\delta, \end{aligned}$$

这里用到了 $\partial_k \vec{\Pi}_\Gamma$ 在 $\mathcal{N}_\delta$ 处沿切向。这便证明了 (3b)。

当 δ 足够小时，按下式将定义在 Γ 上的函数 f 延拓至 $\mathcal{N}_\delta$ ：

$$f = f \circ \vec{\Pi}_\Gamma \quad \text{于 } \mathcal{N}_\delta. \quad (4)$$

也就是说，沿法向将 f 作常值延拓。由注记 [8\(iii\)](#) 得

$$\nabla f \cdot \vec{\nu} = 0, \quad \text{从而} \quad \nabla f = \nabla_s f \quad \text{在 } \Gamma. \quad (5)$$

平直情形下，Schwarz 定理保证 Hessian 矩阵对称；在弯曲情形下，一般不再如此。准确地说，有以下结论。

引理 15 设 Γ 为具有法向量场 $\vec{\nu}$ 的可定向 C^2 超曲面，并设 $f \in C^2(\Gamma)$ 。曲面 Hessian 矩阵满足

$$\nabla_s^2 f - (\nabla_s^2 f)^\top = [(\nabla_s \vec{\nu}) \nabla_s f] \otimes \vec{\nu} - \vec{\nu} \otimes [(\nabla_s \vec{\nu}) \nabla_s f] \quad \text{在 } \Gamma.$$

证明 沿用注记 [8\(ii\)](#) 中的记号 $\nabla_s = (\partial_{s_1}, \dots, \partial_{s_d})^\top$ ，并记 $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_d)^\top$ ，则待证

结论等价于：对所有 $i, j \in \{1, \dots, d\}$ ，有

$$\partial_{s_j} \partial_{s_i} f - \partial_{s_i} \partial_{s_j} f = [(\nabla_s \vec{\nu}) \nabla_s f]_i \nu_j - [(\nabla_s \vec{\nu}) \nabla_s f]_j \nu_i \quad \text{在 } \Gamma, \quad (6)$$

为此，按 (4) 将 f 延拓至 Γ 的一个邻域。由 (5)，在 Γ 上有 $\partial_{s_i}(\nabla f \cdot \vec{\nu}) = 0$ 。因此，利用注记 8(iii)，可算得对所有 $i, j = 1, \dots, d$ ，

$$\partial_{s_i} \partial_{s_j} f = \partial_{s_i} (\partial_j f - (\nabla f \cdot \vec{\nu}) \nu_j) = \partial_{s_i} \partial_j f = \partial_i \partial_j f - (\nabla \partial_j f \cdot \vec{\nu}) \nu_i.$$

再将 $\vec{\nu}$ 类似地按 (4) 延拓至 Γ 的邻域，便由 (5) 得 $\partial_j \vec{\nu} = \partial_{s_j} \vec{\nu}$ ；结合 Schwarz 定理可得

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{s_j} (\nabla f \cdot \vec{\nu}) = \partial_j (\nabla f \cdot \vec{\nu}) - (\nabla (\nabla f \cdot \vec{\nu}) \cdot \vec{\nu}) \nu_j \\ &= \nabla \partial_j f \cdot \vec{\nu} + \nabla f \cdot \partial_j \vec{\nu} - (\nabla (\nabla f \cdot \vec{\nu}) \cdot \vec{\nu}) \nu_j = \nabla \partial_j f \cdot \vec{\nu} + \nabla_s f \cdot \partial_{s_j} \vec{\nu}. \end{aligned}$$

将以上各式与 Schwarz 定理及引理 12(ii) 合并，得到

$$\begin{aligned} \partial_{s_j} \partial_{s_i} f - \partial_{s_i} \partial_{s_j} f &= (\nabla_s f \cdot \partial_{s_i} \vec{\nu}) \nu_j - (\nabla_s f \cdot \partial_{s_j} \vec{\nu}) \nu_i \\ &= (\nabla_s f \cdot \nabla_s \nu_i) \nu_j - (\nabla_s f \cdot \nabla_s \nu_j) \nu_i \\ &= [(\nabla_s \vec{\nu}) \nabla_s f]_i \nu_j - [(\nabla_s \vec{\nu}) \nabla_s f]_j \nu_i. \end{aligned}$$

这便证明了 (6)。 □

引理 16 设 Γ 为具有法向量场 $\vec{\nu}$ 的可定向 C^3 超曲面。则有

$$\nabla_s \kappa = -\Delta_s \vec{\nu} - |\nabla_s \vec{\nu}|^2 \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma.$$

证明 采用引理 15 证明中的记号，由引理 12(ii)、引理 15、引理 13(i) 及引理 12(i) 可得，对于 $j = 1, \dots, d$ ，

$$\begin{aligned} \Delta_s \nu_j &= \sum_{i=1}^d \partial_{s_i} \partial_{s_i} \nu_j = \sum_{i=1}^d \partial_{s_i} \partial_{s_j} \nu_i \\ &= \sum_{i=1}^d (\partial_{s_j} \partial_{s_i} \nu_i - [(\nabla_s \vec{\nu}) \nabla_s \nu_i]_i \nu_j + [(\nabla_s \vec{\nu}) \nabla_s \nu_i]_j \nu_i) \\ &= \partial_{s_j} (\nabla_s \cdot \vec{\nu}) - \nu_j \sum_{i=1}^d |\nabla_s \nu_i|^2 + (\nabla_s \nu_j) \cdot \sum_{i=1}^d (\nabla_s \nu_i) \nu_i \\ &= \partial_{s_j} (\nabla_s \cdot \vec{\nu}) - \nu_j |\nabla_s \vec{\nu}|^2 + (\nabla_s \nu_j) \cdot (\nabla_s \vec{\nu})^\top \vec{\nu} = -\partial_{s_j} \kappa - \nu_j |\nabla_s \vec{\nu}|^2. \end{aligned}$$

由此即得结论。 $\square$

2.3 散度定理

定义 17

(i) 对于 $1 \leq n \leq d$ 和 $k \geq 1$, 若对每个点 $\vec{p} \in \Gamma$, 以下条件之一成立, 则称子集 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 为 n 维带边界 C^k 曲面。

(a) 存在 $\vec{p}$ 的开邻域 $V \subset \mathbb{R}^d$ 和双射的 C^k 映射 $\vec{\mathfrak{X}}: U \rightarrow V \cap \Gamma$, 其中 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为连通开集, 且 $\vec{\mathfrak{X}}$ 的 Jacobian 矩阵 $\nabla \vec{\mathfrak{X}}: U \rightarrow \mathbb{R}^{d \times n}$ 在 U 上满秩。

(b) 存在连通开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 、 $V \subset \mathbb{R}^d$, 满足 $\vec{0} \in U$ 、 $\vec{p} \in V$, 以及单射的 C^k 映射 $\vec{\mathfrak{X}}: U \rightarrow \mathbb{R}^d$, 使得 $\vec{\mathfrak{X}}(\vec{0}) = \vec{p}$, 且

$$\vec{\mathfrak{X}}(U \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0})) = V \cap \Gamma.$$

(ii) (a) 和 (b) 中的映射 $\vec{\mathfrak{X}}: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ 称为 Γ 的局部参数化。在后一情形下, 称 $\vec{\mathfrak{X}}$ 为 Γ 的局部边界参数化。

(iii) 若 $n = d - 1$, 则称 Γ 为带边界超曲面。

注记 18

- (i) Γ 的边界点是指 Γ 上满足定义中第二个条件的点。所有边界点构成的集合称为 Γ 的边界, 记为 $\partial\Gamma$ 。
- (ii) 若 Γ 为 n 维带边界曲面, 则其边界 $\partial\Gamma$ 或为空集, 或为 $(n - 1)$ 维无边界曲面, 详见 Agricola and Friedrich (2002, §3.1)。
- (iii) 若 $\partial\Gamma$ 为空集, 则称 Γ 为无边界曲面。若 Γ 还为紧集, 则称 Γ 为闭曲面。这里注意到, 定义 17 蕴含任何有界超曲面都是紧的。³
- (iv) 第 2.1 节和第 2.2 节中的所有定义与结论均针对 $\vec{p} \in \Gamma \setminus \partial\Gamma$ 陈述。不过, 对带边界曲面, 它们容易推广至 $\vec{p} \in \partial\Gamma$, 只需作如下改动: 在定义 2 中, 对局部边界参数化 $\vec{\mathfrak{X}}$, 将 U 替换为 $U \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$; 注记 8(i) 中亦作相应替换。此外, 在定义 5(i) 中, 取曲线 $\vec{y}: (-1, 0] \rightarrow \Gamma$ 或 $\vec{y}: [0, 1) \rightarrow \Gamma$, 并在 $(\partial_{\vec{\tau}} f)(\vec{p})$ 的定义中取自然的单侧极限。

定义 19 设 Γ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的 n 维 C^1 曲面, $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ 为函数, $\vec{\mathfrak{X}}: U \rightarrow \Gamma$ 为 $\Gamma \setminus \partial\Gamma$ 的

³译注: 此句沿用底本。仅有局部参数化条件与有界性不足以推出紧性; 还须有作为 Euclid 空间子集的闭性等适当假设。

局部参数化。回顾 (2), 对所有使 $f \circ \vec{x}$ 可积的函数 f , 定义

$$\int_{\vec{x}(U)} f \, d\mathcal{H}^n = \int_U f \circ \vec{x} \sqrt{g} \, d\mathcal{L}^n, \quad (7)$$

其中 $\mathcal{L}^n$ 为 n 维 Lebesgue 测度。对于 Γ 的局部边界参数化 $\vec{x}$, 在 (7) 中将 U 替换为 $U \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ 。积分 $\int_{\Gamma} f \, d\mathcal{H}^n$ 通过单位分解和定义 (7) 定义, 详见 Amann and Escher (2009, §XII.1)。由 $\mathcal{H}^n(\Gamma) = \int_{\Gamma} 1 \, d\mathcal{H}^n$ 定义的诱导测度称为 $\mathbb{R}^d$ 中的 n 维 Hausdorff 测度。

定义 20 对于带边界 C^1 超曲面 Γ , 当 $\vec{p} \in \partial\Gamma$ 时, 切空间 $T_{\vec{p}}\partial\Gamma$ 为 $(d-2)$ 维, $T_{\vec{p}}\Gamma$ 为 $(d-1)$ 维, 且 $T_{\vec{p}}\partial\Gamma \subset T_{\vec{p}}\Gamma$ 。因而可唯一选取向量 $\vec{\mu}(\vec{p}) \in T_{\vec{p}}\Gamma$, 称为外单位余法向量, 使得

- (i) $|\vec{\mu}(\vec{p})| = 1$,
- (ii) $\vec{\mu}(\vec{p}) \in N_{\vec{p}}\partial\Gamma$,
- (iii) Γ 上存在曲线 $\vec{y}: (-1, 0] \rightarrow \Gamma$, 满足 $\vec{y}(0) = \vec{p}$ 和 $\vec{y}'(0) = \vec{\mu}(\vec{p})$ 。

以下超曲面上散度定理的推广将被频繁使用。

定理 21 设 Γ 为具有法向量场 $\vec{\nu}$ 的紧可定向 C^2 超曲面, 并设 $\vec{f} \in [C^1(\Gamma)]^d$ 。则有

$$\int_{\Gamma} \nabla_s \cdot \vec{f} + \kappa \vec{f} \cdot \vec{\nu} \, d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{\mu} \, d\mathcal{H}^{d-2},$$

其中 $\vec{\mu}$ 为 $\partial\Gamma$ 的外单位余法向量。

证明 对于切向量场 $\vec{f}$, 这是熟知的结论, 此时不出现 $\kappa \vec{f} \cdot \vec{\nu}$ 。这一特例可仿照 $\mathbb{R}^d$ 中平直区域的情形在曲面上证明, 参见例如 Amann and Escher (2009, §XII.3) 或 Agricola and Friedrich (2002, §3.8)。对于非切向量场 $\vec{f}$, 定义切向量场

$$\vec{h} = \vec{f} - (\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu}$$

利用引理 7(i)、 $\nabla_s(\vec{f} \cdot \vec{\nu})$ 与 $\vec{\nu}$ 正交这一事实以及引理 13(i), 可算得

$$\nabla_s \cdot \vec{h} = \nabla_s \cdot \vec{f} - (\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \nabla_s \cdot \vec{\nu} = \nabla_s \cdot \vec{f} + \kappa \vec{f} \cdot \vec{\nu}.$$

对 $\vec{h}$ 应用散度定理, 并注意到 $\vec{h} \cdot \vec{\mu} = \vec{f} \cdot \vec{\mu}$, 便得到定理的结论。□

注记 22

- (i) 以下分部积分公式是定理 21、引理 7(i) 以及定义 5(ii) 的直接推论。设 $f \in C^2(\Gamma)$

和 $\eta \in C^1(\Gamma)$, 则有

$$\int_{\Gamma} \eta \Delta_s f + \nabla_s f \cdot \nabla_s \eta \, d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial\Gamma} \eta \nabla_s f \cdot \vec{\mu} \, d\mathcal{H}^{d-2}.$$

(ii) 此外, 对于 $f \in C^1(\Gamma)$, 在定理 21 中取 $\vec{f} = f \vec{e}_i$ 、 $i = 1, \dots, d$, 并应用引理 7(i), 得到 Gauss–Green 公式

$$\int_{\Gamma} \nabla_s f + f \kappa \vec{\nu} \, d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial\Gamma} f \vec{\mu} \, d\mathcal{H}^{d-2},$$

(iii) 设 $\vec{f} \in [C^2(\Gamma)]^d$ 和 $\vec{\eta} \in [C^1(\Gamma)]^d$. 由 (i) 及注记 6(iii) 得

$$\int_{\Gamma} \vec{\eta} \cdot \Delta_s \vec{f} + \nabla_s \vec{f} : \nabla_s \vec{\eta} \, d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial\Gamma} \vec{\eta} \cdot (\nabla_s \vec{f}) \vec{\mu} \, d\mathcal{H}^{d-2}.$$

注意到, 对于对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 和任意 $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, 在 Γ 上均有 $P_{\Gamma} A P_{\Gamma} : B = P_{\Gamma} A P_{\Gamma} : \frac{1}{2} P_{\Gamma} (B + B^{\top}) P_{\Gamma}$, 进一步得到

$$\int_{\Gamma} \vec{\eta} \cdot \left(\nabla_s \cdot D_s(\vec{f}) \right) + D_s(\vec{f}) : D_s(\vec{\eta}) \, d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial\Gamma} \vec{\eta} \cdot D_s(\vec{f}) \vec{\mu} \, d\mathcal{H}^{d-2},$$

这里使用了定义 5(vii), 以及定理 21、引理 7(iv) 和注记 6(iv)。

(iv) 下列恒等式对于构造曲率驱动演化方程的数值逼近至关重要。设 $\vec{\eta} \in [C^1(\Gamma)]^d$, 由 (iii)、引理 13(ii)、引理 9(i) 及定义 20 可得

$$\int_{\Gamma} \kappa \vec{\eta} \cdot \vec{\nu} + \nabla_s \text{id} : \nabla_s \vec{\eta} \, d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial\Gamma} \vec{\eta} \cdot \vec{\mu} \, d\mathcal{H}^{d-2}.$$

(v) 对于 Weingarten 映射的数值逼近 (参见定义 10(i)), 以下恒等式颇有用处。设 $\eta \in [C^1(\Gamma)]^{d \times d}$. 在定理 21 中取 $\vec{f} = \eta^{\top} \vec{\nu}$, 并利用引理 7(iv), 可得

$$\int_{\Gamma} \nabla_s \vec{\nu} : \eta + \vec{\nu} \cdot [\kappa \eta \vec{\nu} + \nabla_s \cdot \eta] \, d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial\Gamma} \vec{\nu} \cdot \eta \vec{\mu} \, d\mathcal{H}^{d-2}.$$

2.4 演化曲面与输运定理

本文主要关心演化超曲面。现考虑在时间区间 $[0, T]$ 内演化的超曲面，并定义演化超曲面的概念。

定义 23

- (i) 对于 $k \geq 1$ ，设 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ 为一族 C^k 超曲面（带边界或无边界）。若集合

$$\mathcal{G}_T = \bigcup_{t \in [0, T]} (\Gamma(t) \times \{t\})$$

是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的带边界 C^k 超曲面，且对所有 $(\vec{p}, t) \in \mathcal{G}_T$ 均有 $T_{(\vec{p}, t)} \mathcal{G}_T \neq \mathbb{R}^d \times \{0\}$ ，则称其为 C^k 演化超曲面。我们常将 $\mathcal{G}_T$ 与 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ 等同，并也称后者为 C^k 演化超曲面。

- (ii) 设 $\mathcal{G}_T$ 为 C^1 演化超曲面， $(\vec{p}_0, t_0) \in \mathcal{G}_T$ 。假设 $\mathcal{G}_T$ 上存在连续向量场 $\vec{\nu}: \mathcal{G}_T \rightarrow \mathbb{R}^d$ ，使 $\vec{\nu}(\cdot, t)$ 为 $\Gamma(t)$ 的单位法向量。进一步，对某个 $\delta > 0$ ，设 $\vec{y}: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的一条光滑曲线，满足 $\vec{y}(t) \in \Gamma(t)$ 和 $\vec{y}(t_0) = \vec{p}_0$ 。则 $\Gamma(t_0)$ 在 $\vec{p}_0$ 处的法向速度定义为

$$\mathcal{V}(\vec{p}_0, t_0) = \vec{\nu}(\vec{p}_0, t_0) \cdot \vec{y}'(t_0).$$

- (iii) 设 $\mathcal{G}_T$ 为满足 (ii) 中假设的 C^k 演化超曲面，则称 $\mathcal{G}_T$ 为 C^k 可定向演化超曲面。

注记 24 设 $\mathcal{G}_T$ 为 C^1 可定向演化超曲面。

- (i) 对所有 $(\vec{p}, t) \in \mathcal{G}_T$ 成立的条件 $T_{(\vec{p}, t)} \mathcal{G}_T \neq \mathbb{R}^d \times \{0\}$ ，保证了定义 23(ii) 中曲线 $\vec{y}$ 的存在，参见注记 6(i)。
- (ii) 容易证明 $\mathcal{V}$ 与曲线 $\vec{y}$ 无关。事实上，注意到 $(\vec{y}'(t_0), 1) \in T_{(\vec{p}_0, t_0)} \mathcal{G}_T$ 。因此，若以 $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_{d-1}\}$ 表示 $T_{\vec{p}_0} \Gamma(t_0)$ 的一组基，则 $\{(\vec{\tau}_1, 0), \dots, (\vec{\tau}_{d-1}, 0), (\vec{y}'(t_0), 1)\}$ 是 $T_{(\vec{p}_0, t_0)} \mathcal{G}_T$ 的一组基。由定义 23(ii) 得 $\vec{y}'(t_0) = \mathcal{V}(\vec{p}_0, t_0) \vec{\nu}(\vec{p}_0, t_0) + \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i \vec{\tau}_i$ 其中 $\alpha_i \in \mathbb{R}$ 、 $i = 1, \dots, d-1$ 适当，因而 $(\mathcal{V}(\vec{p}_0, t_0) \vec{\nu}(\vec{p}_0, t_0), 1) \in T_{(\vec{p}_0, t_0)} \mathcal{G}_T$ 。此外，存在唯一向量 $(\vec{\omega}, 1) \in T_{(\vec{p}_0, t_0)} \mathcal{G}_T$ 使 $\vec{\omega}$ 与 $\vec{\nu}(\vec{p}_0, t_0)$ 平行。因此有 $\vec{\omega} = \mathcal{V}(\vec{p}_0, t_0) \vec{\nu}(\vec{p}_0, t_0)$ ，从而 $\mathcal{V}(\vec{p}_0, t_0)$ 与 $\vec{y}$ 无关。
- (iii) 此外， $(1 + \mathcal{V}^2)^{-\frac{1}{2}} (\vec{\nu}, -\mathcal{V})$ 是 $\mathcal{G}_T$ 上的连续法向量场，故 $\mathcal{G}_T$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的可定向超曲面。
- (iv) 若 $\mathcal{G}_T$ 为 C^2 演化超曲面，则更容易证明 $\mathcal{V}$ 与曲线 $\vec{y}$ 无关。为此，在 $\mathcal{G}_T$ 的一个小邻域上选取 C^1 函数 f ，使其在 $\mathcal{G}_T$ 上满足 $f = 0$ ，且对所有 $(\vec{z}, t) \in \mathcal{G}_T$ 均有 $(\nabla f)(\vec{z}, t) \neq \vec{0}$ 。 $f(\cdot, t)$ 可以取为到 $\Gamma(t)$ 的有符号距离函数 $d_\Gamma(\cdot, t)$ ，参见 (3)。对

于定义 23(ii) 中的曲线 $\vec{y}$, 可算得

$$0 = \frac{d}{dt} f(\vec{y}(t), t) = (\nabla f)(\vec{y}(t), t) \cdot \vec{y}'(t) + (\partial_t f)(\vec{y}(t), t).$$

由于 $\vec{\nu} = \nabla f / |\nabla f|$, 得到

$$\mathcal{V}(\vec{p}_0, t_0) = \vec{\nu}(\vec{p}_0, t_0) \cdot \vec{y}'(t_0) = - \left(\frac{\partial_t f}{|\nabla f|} \right) (\vec{p}_0, t_0),$$

其中右端与 $\vec{y}$ 无关。

通常, 我们考虑由以下整体参数化给出的演化超曲面。

定义 25 设 $\mathcal{G}_T$ 为 C^k 演化超曲面, Υ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的 C^k 超曲面, 满足 $k \geq 1$ 。

- (i) 若 C^k 映射 $\vec{x}: \Upsilon \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 对所有 $t \in [0, T]$ 均使 $\vec{x}(\cdot, t)$ 成为从 Υ 到 $\Gamma(t)$ 的微分同胚, 则称其为 $\mathcal{G}_T$ 的**整体参数化**。
- (ii) 由参数化 $\vec{x}$ 诱导的 $\Gamma(t)$ 在 $\mathcal{G}_T$ 上的**全速度**定义为

$$\vec{\mathcal{V}}(\vec{x}(\vec{q}, t), t) = (\partial_t \vec{x})(\vec{q}, t) \quad \forall (\vec{q}, t) \in \Upsilon \times [0, T].$$

- (iii) 由参数化 $\vec{x}$ 诱导的 $\Gamma(t)$ 在 $\mathcal{G}_T$ 上的**切向速度**定义为

$$\vec{\mathcal{V}}_T = P_\Gamma \vec{\mathcal{V}} \quad \text{在 } \Gamma(t),$$

参见 (1)。

- (iv) 定义 $\Gamma(t)$ 的**形变率张量**为

$$D_s(\vec{\mathcal{V}}) \quad \text{在 } \Gamma(t),$$

参见定义 5(vii)。

注记 26

- (i) 对于定义 23(ii) 中定义的可定向演化超曲面 $\mathcal{G}_T$ 的法向速度, 有

$$\mathcal{V} = \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\nu} \quad \text{在 } \mathcal{G}_T.$$

因而

$$\vec{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \vec{\nu} + \vec{\mathcal{V}}_T \quad \text{在 } \mathcal{G}_T.$$

这里强调, $\mathcal{V}$ 与参数化 $\vec{x}$ 无关, 而 $\vec{\mathcal{V}}_T$ 显然依赖于参数化。

- (ii) $D_s(\vec{\mathcal{V}})$ 称为“形变率张量”, 是因为它描述了 $\Gamma(t)$ 在 $\vec{x}$ 诱导的运动下如何发生局部形变。下文的引理 30 将对此给出严格表述。

$\mathcal{G}_T$ 上的速度场 $\vec{\mathcal{V}}$ 具有以下性质。为简化记号, 本节及下文常将 $\Gamma(t) \times \{t\}$ 与 $\Gamma(t)$ 等同。

引理 27 设 $\mathcal{G}_T$ 为 C^2 可定向演化超曲面, 其整体参数化诱导速度场 $\vec{\mathcal{V}}$ 。

(i) 有

$$\nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}} = -\mathcal{V} \kappa + \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}_T \quad \text{在 } \Gamma(t) \text{ 上}.$$

(ii) 此外, 有

$$\nabla_s \vec{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \nabla_s \vec{\nu} + \vec{\nu} \otimes \nabla_s \mathcal{V} + \nabla_s \vec{\mathcal{V}}_T \quad \text{在 } \Gamma(t) \text{ 上}.$$

(iii) 最后, 形变率张量满足

$$D_s(\vec{\mathcal{V}}) = \mathcal{V} \nabla_s \vec{\nu} + \frac{1}{2} (P_\Gamma \nabla_s \vec{\mathcal{V}}_T + (\nabla_s \vec{\mathcal{V}}_T)^\top P_\Gamma) \quad \text{在 } \Gamma(t) \text{ 上}.$$

证明 注意到 $\vec{\mathcal{V}}(\cdot, t) \in [C^1(\Gamma(t))]^d$ 及注记 26(i), 所需结论由引理 14 直接得到。□

同时考虑定义 17 意义下的 $\Gamma(t)$ 的局部参数化, 往往也很方便。为此, 设 $\vec{\varphi}: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为 Υ 的局部参数化, 其中 $U \subset \mathbb{R}^{d-1}$ 为连通开集, 则

$$\vec{\mathfrak{X}}(t) = \vec{x}(\cdot, t) \circ \vec{\varphi} \quad \text{于 } U, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

给出 $\Gamma(t)$ 的一个局部参数化。

下面定义函数 $f: \mathcal{G}_T \rightarrow \mathbb{R}$ 的时间导数。由于对不同的时刻 t , 点 $\vec{p}$ 未必位于 $\Gamma(t)$ 上, 因此不能直接将 $f(\vec{p}, t)$ 对 t 求导。对 t 求导时, 必须使点 $\vec{p}$ 随之运动, 故时间导数的定义存在一定的不唯一性。

定义 28 设 $\mathcal{G}_T$ 为具有整体参数化 $\vec{x}: \Upsilon \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 的 C^1 演化超曲面, 并设 $f \in C^1(\mathcal{G}_T)$ 。

(i) 表达式

$$(\partial_t^\circ f)(\vec{x}(\vec{q}, t), t) = \frac{d}{dt} f(\vec{x}(\vec{q}, t), t) \quad \forall (\vec{q}, t) \in \Upsilon \times [0, T]$$

是 f 在 $\Gamma(t)$ 上沿参数化 $\vec{x}(\cdot, t)$ 的时间导数, 也称为 $\vec{x}$ 诱导的**物质导数**。

(ii) f 在 $\Gamma(t)$ 上的**法向时间导数**定义为

$$\partial_t^\square f = \partial_t^\circ f - \vec{\mathcal{V}}_T \cdot \nabla_s f.$$

注记 29

(i) 量 $\partial_t^\circ f$ 依赖于参数化 $\vec{x}$ 。此外, $\Gamma(t)$ 上有 $\vec{\mathcal{V}} = \partial_t^\circ \text{id}$, U 中有 $\vec{\mathcal{V}} \circ \vec{\mathfrak{X}} = \partial_t \vec{\mathfrak{X}}$ 。

以下讨论假设已将 f 延拓至 $\mathcal{G}_T$ 的一个邻域。

(ii) 有

$$\partial_t^\circ f = \partial_t f + \vec{\mathcal{V}} \cdot \nabla f \quad \text{在 } \Gamma(t),$$

其中 ∇f 表示延拓函数 f 在 $\mathbb{R}^d$ 中的梯度。

(iii) 此外, 有

$$\partial_t^\square f = \partial_t f + \mathcal{V} \vec{\nu} \cdot \nabla f \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

由注记 24(ii), 特别可知 $\partial_t^\square f$ 与 $\vec{x}$ 无关。事实上, $\partial_t^\square f$ 是 f 沿方向 $(\mathcal{V} \vec{\nu}, 1)$ 的导数, 其中向量 $(\mathcal{V} \vec{\nu}, 1)$ 是演化曲面 $\mathcal{G}_T$ 的时空切向量。也就是说,

$$\partial_t^\square f = \partial_{(\mathcal{V} \vec{\nu}, 1)} f \quad \text{在 } \mathcal{G}_T,$$

参见定义 5(i)。

(iv) 取满足 $\vec{g}(t) \in \Gamma(t)$ 和 $\vec{g}'(t) = (\mathcal{V} \vec{\nu}) \circ \vec{g}$ 的曲线 $t \mapsto \vec{g}(t) \in \mathbb{R}^d$, 由 (iii) 得

$$(\partial_t^\square f)(\vec{g}(t), t) = \frac{d}{dt} f(\vec{g}(t), t).$$

对于随时间变化的度量张量 $(g_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,d-1}$, 有以下引理。与注记 8(i) 类似, 该张量由

$$g_{ij}(t) = \partial_i \vec{\mathfrak{X}}(t) \cdot \partial_j \vec{\mathfrak{X}}(t) \quad \text{于 } U, \quad (9)$$

定义, 其中 $\vec{\mathfrak{X}}(t) = \vec{x}(\cdot, t) \circ \varphi$, 参见 (8)。为简化记号, 本节及下文常略去对 t 的依赖。

引理 30 设 $\mathcal{G}_T$ 为 C^2 演化超曲面, 其整体参数化 $\vec{x}$ 诱导速度场 $\vec{\mathcal{V}}$, 并由 (9) 定义度量张量。则有

$$\partial_t g_{ij} = 2((D_s(\vec{\mathcal{V}}) \circ \vec{\mathfrak{X}}) \partial_i \vec{\mathfrak{X}}) \cdot \partial_j \vec{\mathfrak{X}} \quad \text{于 } U,$$

其中 $D_s(\vec{\mathcal{V}})$ 为形变率张量, 参见定义 25(iv)。

证明 引入简写 $\vec{\partial}_i = \partial_i \vec{\mathfrak{X}}$, $i = 1, \dots, d-1$, 并回顾注记 29(i), 在 U 中有 $\vec{\mathcal{V}} \circ \vec{\mathfrak{X}} = \partial_t \vec{\mathfrak{X}}$ 。利用注记 6(iii) 可算得

$$\begin{aligned} \partial_t g_{ij} &= \partial_t (\partial_i \vec{\mathfrak{X}} \cdot \partial_j \vec{\mathfrak{X}}) = \partial_i (\vec{\mathcal{V}} \circ \vec{\mathfrak{X}}) \cdot \vec{\partial}_j + \vec{\partial}_i \cdot \partial_j (\vec{\mathcal{V}} \circ \vec{\mathfrak{X}}) \\ &= ((\nabla_s \vec{\mathcal{V}}) \circ \vec{\mathfrak{X}} \vec{\partial}_i) \cdot \vec{\partial}_j + \vec{\partial}_i \cdot (\nabla_s \vec{\mathcal{V}}) \circ \vec{\mathfrak{X}} \vec{\partial}_j \\ &= (\nabla_s \vec{\mathcal{V}} + (\nabla_s \vec{\mathcal{V}})^\top) \circ \vec{\mathfrak{X}} \vec{\partial}_i \cdot \vec{\partial}_j. \end{aligned}$$

由于 $\vec{\partial}_i$ 和 $\vec{\partial}_j$ 均沿切向, 结论随之成立。□

为计算面积的第一变分, 须确定面积元 $\sqrt{g}$ 如何随时间演化, 参见定义 19。下一个引理讨论这一问题。

引理 31 设 $\mathcal{G}_T$ 为 C^2 可定向演化超曲面, 其整体参数化 $\vec{x}$ 诱导速度场 $\vec{\mathcal{V}}$, 并由 (9)

定义度量张量。则有

$$\partial_t \sqrt{g} = (\nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}) \circ \vec{\mathfrak{X}} \sqrt{g} = (-\mathcal{V} \varkappa + \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}_T) \circ \vec{\mathfrak{X}} \sqrt{g} \quad \text{于 } U,$$

其中

$$g(t) = \det((g_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,d-1}).$$

证明 对于 $G(t) = (g_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,d-1}$, 行列式求导的 Jacobi 公式 (参见例如 Eck et al. (2017, 引理 5.3)) 给出

$$\partial_t \det G(t) = \det G(t) \operatorname{tr}(G^{-1}(t) \partial_t G(t)).$$

由于 $g(t) = \det G(t)$ 且 $G(t)$ 对称, 由引理 30 的证明可得

$$\begin{aligned} \partial_t \sqrt{g} &= \partial_t \sqrt{\det G} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \operatorname{tr}(G^{-1} \partial_t G) = \frac{1}{2} \sqrt{g} G^{-1} : \partial_t G \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{g} \sum_{i,j=1}^{d-1} g^{ij} \partial_t g_{ij} = \sqrt{g} \sum_{i,j=1}^{d-1} g^{ij} \partial_i (\vec{\mathcal{V}} \circ \vec{\mathfrak{X}}) \cdot \partial_j \vec{\mathfrak{X}} \\ &= \sqrt{g} (\nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}) \circ \vec{\mathfrak{X}}, \end{aligned}$$

其中最后一步使用了注记 8(i)。第二个恒等式是引理 27(i) 的直接推论。 $\square$

现在可以证明演化超曲面的输运定理, 它是后文许多论证的关键。

定理 32 设 $\mathcal{G}_T$ 为紧的 C^2 可定向演化超曲面, 其整体参数化诱导速度场 $\vec{\mathcal{V}}$, 并设 $f \in C^1(\mathcal{G}_T)$ 。则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} f \, d\mathcal{H}^{d-1} &= \int_{\Gamma(t)} (\partial_t^\circ f + f \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}) \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \int_{\Gamma(t)} (\partial_t^\circ f + f \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}_T - f \mathcal{V} \varkappa) \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \int_{\Gamma(t)} (\partial_t^\square f - f \mathcal{V} \varkappa) \, d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\partial\Gamma(t)} f \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mu} \, d\mathcal{H}^{d-2}, \end{aligned}$$

其中 $\vec{\mu}$ 为 $\partial\Gamma$ 的外单位余法向量。

证明 首先考虑支集包含于单个随时间变化的局部参数化 $\vec{\mathfrak{X}}(t) = \vec{x}(\cdot, t) \circ \vec{\varphi}$ 的像中的

f , 参见 (8)。此时由定义 19、定义 28(i) 及引理 31 可算得

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} f \, d\mathcal{H}^{d-1} &= \frac{d}{dt} \int_{\vec{x}(\vec{\varphi}(U), t)} f \, d\mathcal{H}^{d-1} \\
 &= \frac{d}{dt} \int_U f(\vec{x}(\vec{\varphi}(\vec{u}), t), t) \sqrt{g} \, d\mathcal{L}^{d-1} \\
 &= \int_U (\partial_t^\circ f + f \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}) \circ \vec{x} \sqrt{g} \, d\mathcal{L}^{d-1} \\
 &= \int_{\Gamma(t)} (\partial_t^\circ f + f \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}) \, d\mathcal{H}^{d-1}.
 \end{aligned}$$

利用单位分解即可证明结论中的第一个恒等式。第二个恒等式由引理 27(i) 得到。再由定理 21 和定义 20 注意到

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma(t)} \nabla_s \cdot (f \vec{\mathcal{V}}_T) \, d\mathcal{H}^{d-1} &= - \int_{\Gamma(t)} \kappa f \vec{\mathcal{V}}_T \cdot \vec{\nu} \, d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\partial\Gamma(t)} f \vec{\mathcal{V}}_T \cdot \vec{\mu} \, d\mathcal{H}^{d-2} \\
 &= \int_{\partial\Gamma(t)} f \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mu} \, d\mathcal{H}^{d-2}.
 \end{aligned}$$

结合定义 28(ii) 和引理 7(i), 便得到最后一个恒等式。 $\square$

对于运动区域, 也有如下输运定理。

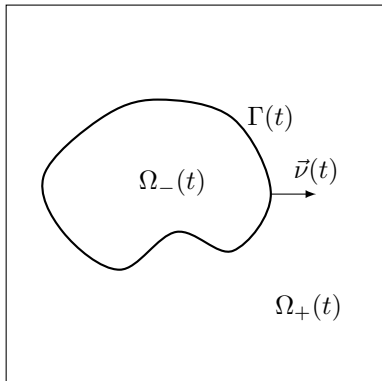
定理 33 设 $\mathcal{G}_T$ 为紧的 C^2 可定向演化超曲面, 对 $t \in [0, T]$, $\Gamma(t)$ 为区域 $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$ 的边界。假设 $\vec{\nu}(t)$ 是 $\Omega(t)$ 在 $\Gamma(t)$ 上的外单位法向量, 且 $f \in C^1(\overline{\mathfrak{D}_T})$, 其中

$$\mathfrak{D}_T = \bigcup_{t \in [0, T]} (\Omega(t) \times \{t\}).$$

则有

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f \, d\mathcal{L}^d = \int_{\Omega(t)} \partial_t f \, d\mathcal{L}^d + \int_{\Gamma(t)} f \mathcal{V} \, d\mathcal{H}^{d-1}. \quad (10)$$

证明 证明可见 Prüss and Simonett (2016, Chapter 2)。若运动区域由速度场 $\vec{\mathcal{V}}_{\mathfrak{D}} : \mathfrak{D}_T \rightarrow \mathbb{R}^d$ 输运, 且在 $\mathcal{G}_T$ 上有 $\vec{\mathcal{V}}_{\mathfrak{D}} \cdot \vec{\nu} = \mathcal{V}$, 则可仿照定理 32 证明本定理。另一种证明是对 (10) 积分, 并应用时空中的散度定理, 参见例如 Eck et al. (2017, §7.3)。 $\square$

图 1: $d = 2$ 时区域 Ω 的示意图。

注记 34 若运动区域 $\mathfrak{D}_T$ 由速度场 $\vec{\mathcal{V}}_{\mathfrak{D}} : \mathfrak{D}_T \rightarrow \mathbb{R}^d$ 输运, 则得到 Reynolds 输运定理

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f \, d\mathcal{L}^d &= \int_{\Omega(t)} \partial_t f \, d\mathcal{L}^d + \int_{\Gamma(t)} f \vec{\mathcal{V}}_{\mathfrak{D}} \cdot \vec{\nu} \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \int_{\Omega(t)} \partial_t f + \nabla \cdot (f \vec{\mathcal{V}}_{\mathfrak{D}}) \, d\mathcal{L}^d, \end{aligned}$$

这里使用了 $\mathbb{R}^d$ 中的散度定理, 并再次假设 $\vec{\nu}(t)$ 是 $\Omega(t)$ 在 $\Gamma(t)$ 上的外单位法向量。

利用定理 33, 还可证明两相运动区域的输运定理。为此, 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为固定有界区域, $\mathcal{G}_T$ 为紧的 C^2 可定向演化超曲面, 满足 $\Gamma(t) \subset \Omega$; 对所有 $t \in [0, T]$, $\Gamma(t)$ 围成区域 $\Omega_-(t) \subset \Omega$, 且 $\Gamma(t) = \partial\Omega_-(t)$ 。设 $\Omega_+(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_-(t)}$, 以 $\vec{\nu}(t)$ 表示 $\Omega_-(t)$ 在 $\Gamma(t)$ 上的外法向量, 见图 1。有

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega_-(t)} \cup \overline{\Omega_+(t)}, \quad \overline{\Omega_-(t)} \cap \overline{\Omega_+(t)} = \Gamma(t), \quad \partial\Omega_+(t) = \Gamma(t) \cup \partial\Omega.$$

现设

$$\mathfrak{D}_{\pm, T} = \bigcup_{t \in [0, T]} (\Omega_{\pm}(t) \times \{t\}),$$

并给定 $f_{\pm} : \mathfrak{D}_{\pm, T} \rightarrow \mathbb{R}$, 使每个 $f_{\pm}$ 均可连续延拓至 $\overline{\mathfrak{D}_{\pm, T}}$ 。将 $f : \mathfrak{D}_{-, T} \cup \mathfrak{D}_{+, T} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(\cdot, t) = f_-(\cdot, t) \chi_{\Omega_-(t)} + f_+(\cdot, t) \chi_{\Omega_+(t)} \quad \forall t \in [0, T], \quad (11)$$

其中, 本节及下文以 $\chi_{\mathfrak{A}}$ 表示集合 $\mathfrak{A}$ 的特征函数, 并令

$$[f]_{-}^{+}(\vec{z}, t) = \lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow \vec{z} \\ \vec{y} \in \Omega_{+}(t)}} f(\vec{y}, t) - \lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow \vec{z} \\ \vec{y} \in \Omega_{-}(t)}} f(\vec{y}, t) \quad \forall (\vec{z}, t) \in \mathcal{G}_T. \quad (12)$$

由此得到以下结论。

定理 35 设 $\mathcal{G}_T \subset \Omega \times [0, T]$ 为紧的 C^2 可定向演化超曲面, 对 $t \in [0, T]$, $\Gamma(t)$ 为区域 $\Omega_{-}(t) \subset \mathbb{R}^d$ 的边界。假设 $\vec{\nu}(t)$ 是 $\Omega_{-}(t)$ 在 $\Gamma(t)$ 上的外单位法向量, 且 $f_{\pm} \in C^1(\overline{\Omega_{\pm, T}})$ 。则对于 (11) 中定义的 f , 有

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f \, d\mathcal{L}^d = \int_{\Omega_{-}(t)} \partial_t f \, d\mathcal{L}^d + \int_{\Omega_{+}(t)} \partial_t f \, d\mathcal{L}^d - \int_{\Gamma(t)} [f]_{-}^{+} \nu \, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

证明 结论由定理 33 直接得到。 $\square$

注记 36 自然地将 (12) 推广至向量值的量。例如, 若 (11) 中定义的 f 可连续延拓至 $\overline{\Omega} \times [0, T]$, 且每个 $\nabla f_{\pm}$ 均可连续延拓至 $\overline{\Omega_{\pm, T}}$, 则定义

$$[\partial_{\vec{\nu}} f]_{-}^{+}(\vec{z}, t) = \lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow \vec{z} \\ \vec{y} \in \Omega_{+}(t)}} (\nabla f_{+})(\vec{y}, t) \cdot \vec{\nu}(\vec{z}, t) - \lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow \vec{z} \\ \vec{y} \in \Omega_{-}(t)}} (\nabla f_{-})(\vec{y}, t) \cdot \vec{\nu}(\vec{z}, t) \quad \forall (\vec{z}, t) \in \mathcal{G}_T. \quad (13)$$

对于这样的 f , 在 $\mathbb{R}^d$ 中分部积分立即得到: 对所有 $\eta \in C^1(\overline{\Omega})$, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{-}(t) \cup \Omega_{+}(t)} \eta \Delta f \, d\mathcal{L}^d \\ &= \int_{\partial\Omega} \eta \partial_{\vec{\nu}_{\Omega}} f \, d\mathcal{H}^{d-1} - \int_{\Gamma(t)} \eta [\partial_{\vec{\nu}} f]_{-}^{+} \, d\mathcal{H}^{d-1} - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla \eta \, d\mathcal{L}^d \end{aligned}$$

其中 $\vec{\nu}_{\Omega}$ 表示 Ω 在 $\partial\Omega$ 上的外单位法向量。

2.5 法向量的时间导数

我们还经常需要法向量的时间导数。有关结论列于以下引理。

引理 37 设 $\mathcal{G}_T$ 为 C^2 可定向演化超曲面。

(i) 设 $\vec{\mathcal{V}}$ 为 $\mathcal{G}_T$ 的整体参数化所诱导的速度场, 则有

$$\partial_t^{\circ} \vec{\nu} = -(\nabla_s \vec{\mathcal{V}})^{\top} \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

(ii) $\vec{\nu}$ 的法向时间导数满足

$$\partial_t^\square \vec{\nu} = -\nabla_s \mathcal{V} \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

证明 (i) 对于 $\vec{p} \in \Gamma(t)$, 其中 $\vec{p} = \vec{x}(\vec{\varphi}(\vec{u}, t), t) = \vec{\mathfrak{x}}(\vec{u}, t)$ (参见 (8)), 通过 $\vec{\tau}_i(\vec{p}) = \partial_i \vec{\mathfrak{x}}(\vec{u}, t)$, $i = 1, \dots, d-1$ 定义切空间 $T_{\vec{p}}\Gamma(t)$ 的一组基 $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_{d-1}\}$. 再由注记 29(i) 回顾 $\vec{\mathcal{V}} \circ \vec{\mathfrak{x}} = \partial_t \vec{\mathfrak{x}}$, 便有

$$\begin{aligned} \partial_t^\circ \vec{\tau}_i &= \partial_t [(\partial_i \vec{\mathfrak{x}}) \circ \vec{\mathfrak{x}}^{-1}] = [\partial_i (\partial_t \vec{\mathfrak{x}})] \circ \vec{\mathfrak{x}}^{-1} = [\partial_i (\vec{\mathcal{V}} \circ \vec{\mathfrak{x}})] \circ \vec{\mathfrak{x}}^{-1} = \partial_{\vec{\tau}_i} \vec{\mathcal{V}} \\ &= (\nabla_s \vec{\mathcal{V}}) \vec{\tau}_i \quad \text{在 } \Gamma(t), \end{aligned}$$

其中最后一步使用了注记 6(iii). 由于 $\vec{\nu} \cdot \vec{\tau}_i = 0$, 对于 $i = 1, \dots, d-1$, 有

$$(\partial_t^\circ \vec{\nu}) \cdot \vec{\tau}_i = -\vec{\nu} \cdot \partial_t^\circ \vec{\tau}_i = -\vec{\nu} \cdot ((\nabla_s \vec{\mathcal{V}}) \vec{\tau}_i) = -((\nabla_s \vec{\mathcal{V}})^\top \vec{\nu}) \cdot \vec{\tau}_i \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

又由于 $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_{d-1}\}$ 是切空间 $T_{\vec{p}}\Gamma(t)$ 的一组基, 利用 $(\partial_t^\circ \vec{\nu}) \cdot \vec{\nu} = \frac{1}{2} \partial_t^\circ |\vec{\nu}|^2 = 0$ 以及 $\vec{\nu} \cdot (\nabla_s \vec{\mathcal{V}})^\top \vec{\nu} = (\nabla_s \vec{\mathcal{V}}) \vec{\nu} \cdot \vec{\nu} = 0$ 这一事实 (参见注记 6(iii)), 得到

$$\partial_t^\circ \vec{\nu} = -(\nabla_s \vec{\mathcal{V}})^\top \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

(ii) 设 $\vec{x}$ 为 $\mathcal{G}_T$ 的任意整体参数化, 所诱导的速度场为 $\vec{\mathcal{V}}$. 利用定义 28(ii)、引理 12、(i) 的结论及引理 7(ii), 可算得

$$\begin{aligned} \partial_t^\square \vec{\nu} &= \partial_t^\circ \vec{\nu} - (\nabla_s \vec{\nu}) \vec{\mathcal{V}}_T = \partial_t^\circ \vec{\nu} - (\nabla_s \vec{\nu})^\top \vec{\mathcal{V}}_T = -(\nabla_s \vec{\mathcal{V}})^\top \vec{\nu} - (\nabla_s \vec{\nu})^\top \vec{\mathcal{V}}_T \\ &= -(\nabla_s \vec{\mathcal{V}})^\top \vec{\nu} - (\nabla_s \vec{\nu})^\top \vec{\mathcal{V}} = -\nabla_s (\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\nu}) = -\nabla_s \mathcal{V} \quad \text{在 } \Gamma(t). \end{aligned}$$

□

2.6 平均曲率的时间导数

为计算依赖于平均曲率的能量的第一变分, 例如借助定理 32 进行计算, 需要曲率时间导数的表达式。

首先给出时间导数与曲面微分算子的以下交换关系。

引理 38 设 $\mathcal{G}_T$ 为 C^2 可定向演化超曲面, 其整体参数化诱导速度场 $\vec{\mathcal{V}}$; 设 $f: \mathcal{G}_T \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{f}: \mathcal{G}_T \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为 C^1 函数。则有以下结论:

(i)

$$\partial_t^\circ \nabla_s f - \nabla_s \partial_t^\circ f = [\nabla_s \vec{\mathcal{V}} - 2D_s(\vec{\mathcal{V}})] \nabla_s f \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

(ii)

$$\partial_t^\circ \nabla_s \vec{f} - \nabla_s \partial_t^\circ \vec{f} = (\nabla_s \vec{f}) [\nabla_s \vec{\mathcal{V}} - 2D_s(\vec{\mathcal{V}})]^\top \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

(iii)

$$\partial_t^\circ (\nabla_s \cdot \vec{f}) - \nabla_s \cdot (\partial_t^\circ \vec{f}) = [\nabla_s \vec{\mathcal{V}} - 2D_s(\vec{\mathcal{V}})] : \nabla_s \vec{f} \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

证明 (i) 将 f 延拓至 $\mathcal{G}_T$ 的一个邻域, 使从 $\Gamma(t)$ 得到的延拓沿 $\vec{\nu}$ 方向为常值, 参见 (4)。由 (5) 及引理 37(i), 在 $\Gamma(t)$ 上有

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t^\circ (\nabla f \cdot \vec{\nu}) = \partial_t^\circ (\nabla_s f \cdot \vec{\nu}) = (\partial_t^\circ \nabla_s f) \cdot \vec{\nu} + \nabla_s f \cdot \partial_t^\circ \vec{\nu} \\ &= (\partial_t^\circ \nabla_s f) \cdot \vec{\nu} - (\nabla_s f) \cdot (\nabla_s \vec{\mathcal{V}})^\top \vec{\nu} = (\partial_t^\circ \nabla_s f) \cdot \vec{\nu} - ((\nabla_s \vec{\mathcal{V}}) \nabla_s f) \cdot \vec{\nu}. \end{aligned}$$

由于 $\nabla_s \partial_t^\circ f$ 沿切向, 得到

$$(\partial_t^\circ \nabla_s f - \nabla_s \partial_t^\circ f) \cdot \vec{\nu} = ((\nabla_s \vec{\mathcal{V}}) \nabla_s f) \cdot \vec{\nu}.$$

下面确定 $\partial_t^\circ \nabla_s f - \nabla_s \partial_t^\circ f$ 的切向分量, 参见 (1)。利用 (5)、注记 6(v)、注记 29(ii)、注记 8(iii)、引理 7(ii) 及注记 6(iii), 可算得

$$\begin{aligned} P_\Gamma (\partial_t^\circ \nabla_s f - \nabla_s \partial_t^\circ f) &= P_\Gamma \partial_t^\circ \nabla f - \nabla_s \partial_t^\circ f \\ &= P_\Gamma (\partial_t \nabla f + (\nabla^2 f) \vec{\mathcal{V}}) - \nabla_s (\partial_t f + \vec{\mathcal{V}} \cdot \nabla f) \\ &= P_\Gamma (\partial_t \nabla f + (\nabla^2 f) \vec{\mathcal{V}}) - P_\Gamma \nabla \partial_t f - \nabla_s (\vec{\mathcal{V}} \cdot \nabla f) \\ &= P_\Gamma (\nabla^2 f) \vec{\mathcal{V}} - (\nabla_s \vec{\mathcal{V}})^\top \nabla f - P_\Gamma \sum_{i=1}^d \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{e}_i \nabla \partial_i f \\ &= -(\nabla_s \vec{\mathcal{V}})^\top \nabla_s f. \end{aligned}$$

合并以上各式, 并利用定义 5(vii) 和注记 6(v), 得到

$$\begin{aligned} \partial_t^\circ \nabla_s f - \nabla_s \partial_t^\circ f &= P_\Gamma (\partial_t^\circ \nabla_s f - \nabla_s \partial_t^\circ f) + (\text{Id} - P_\Gamma) (\partial_t^\circ \nabla_s f - \nabla_s \partial_t^\circ f) \\ &= -(\nabla_s \vec{\mathcal{V}})^\top \nabla_s f + (\text{Id} - P_\Gamma) (\nabla_s \vec{\mathcal{V}}) \nabla_s f = [\nabla_s \vec{\mathcal{V}} - 2D_s(\vec{\mathcal{V}})] \nabla_s f, \end{aligned}$$

即为所需结论。

(ii) 由 (i) 和注记 6(iii), 对于 $i = 1, \dots, d$, 有

$$\begin{aligned} (\partial_t^\circ \nabla_s \vec{f} - \nabla_s \partial_t^\circ \vec{f})^\top \vec{e}_i &= (\partial_t^\circ \nabla_s - \nabla_s \partial_t^\circ) (\vec{f} \cdot \vec{e}_i) \\ &= [\nabla_s \vec{\mathcal{V}} - 2D_s(\vec{\mathcal{V}})] (\nabla_s \vec{f})^\top \vec{e}_i, \end{aligned}$$

这便证明了所需结论。

(iii) 利用 (ii) 及引理 7(v) 可算得

$$\begin{aligned}\partial_t^\circ (\nabla_s \cdot \vec{f}) - \nabla_s \cdot (\partial_t^\circ \vec{f}) &= \text{tr} \left(\partial_t^\circ (\nabla_s \vec{f}) - \nabla_s (\partial_t^\circ \vec{f}) \right) \\ &= \text{tr} \left((\nabla_s \vec{f}) [\nabla_s \vec{\nu} - 2D_s(\vec{\nu})]^\top \right) = [\nabla_s \vec{\nu} - 2D_s(\vec{\nu})] : \nabla_s \vec{f},\end{aligned}$$

由此得到所需结论。 $\square$

现在可得到平均曲率的时间导数公式。

引理 39 设 $\mathcal{G}_T$ 为 C^3 可定向演化超曲面。

(i) 设 $\vec{\nu}_T$ 为 $\mathcal{G}_T$ 的整体参数化所诱导的切向速度场, 则有

$$\partial_t^\circ \kappa = \Delta_s \nu + \nu |\nabla_s \vec{\nu}|^2 + \vec{\nu}_T \cdot \nabla_s \kappa \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

(ii) 平均曲率的法向时间导数满足

$$\partial_t^\square \kappa = \Delta_s \nu + \nu |\nabla_s \vec{\nu}|^2 \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

证明 (i) 由引理 13(i)、引理 38(iii)、引理 37(i)、引理 27(ii)、(iii) 及引理 12 得

$$\begin{aligned}\partial_t^\circ \kappa &= -\partial_t^\circ (\nabla_s \cdot \vec{\nu}) = -\nabla_s \cdot (\partial_t^\circ \vec{\nu}) - [\nabla_s \vec{\nu} - 2D_s(\vec{\nu})] : \nabla_s \vec{\nu} \\ &= \nabla_s \cdot ((\nabla_s \vec{\nu})^\top \vec{\nu}) + \nu |\nabla_s \vec{\nu}|^2 + \nabla_s \vec{\nu}_T : \nabla_s \vec{\nu} \\ &= \nabla_s \cdot (\nabla_s \nu + (\nabla_s \vec{\nu}_T)^\top \vec{\nu}) + \nu |\nabla_s \vec{\nu}|^2 + \nabla_s \vec{\nu}_T : \nabla_s \vec{\nu}.\end{aligned}$$

由于 $\vec{\nu}_T \cdot \vec{\nu} = 0$, 由引理 7(ii) 及引理 12(ii) 得 $(\nabla_s \vec{\nu}_T)^\top \vec{\nu} = -(\nabla_s \vec{\nu}) \vec{\nu}_T$, 因而引理 7(i) 给出

$$\begin{aligned}\partial_t^\circ \kappa &= \Delta_s \nu - \nabla_s \cdot ((\nabla_s \vec{\nu}) \vec{\nu}_T) + \nu |\nabla_s \vec{\nu}|^2 + \nabla_s \vec{\nu}_T : \nabla_s \vec{\nu} \\ &= \Delta_s \nu - (\Delta_s \vec{\nu}) \cdot \vec{\nu}_T - \nabla_s \vec{\nu} : \nabla_s \vec{\nu}_T + \nu |\nabla_s \vec{\nu}|^2 + \nabla_s \vec{\nu}_T : \nabla_s \vec{\nu} \\ &= \Delta_s \nu - (\Delta_s \vec{\nu}) \cdot \vec{\nu}_T + \nu |\nabla_s \vec{\nu}|^2.\end{aligned}$$

结合引理 16 便得所需结论。

(ii) 选取 $\mathcal{G}_T$ 的任意整体参数化, 设其诱导的切向速度场为 $\vec{\nu}_T$, 则结论由 (i) 及定义 28(ii) 得到。 $\square$

2.7 Gauss–Bonnet 定理

当 $d = 3$ 时, 可考虑超曲面 Γ 上的曲线 $\mathfrak{g}$ 。对于 $\mathbb{R}^3$ 中的任意曲线, 可定义曲率向量

$$\vec{\kappa}_{\mathfrak{g}} = \vec{\text{id}}_{ss} \quad \text{在 } \mathfrak{g}, \quad (14)$$

其中 ∂_s^2 表示在 γ 上关于弧长的二阶导数。注意, (14) 在曲线的参数化改变时保持不变。

后文需要 Gauss–Bonnet 定理, 其中在 $\mathfrak{g} = \partial\Gamma \subset \Gamma$ 的特殊情形下使用了 (14)。

定理 40 (Gauss–Bonnet) 设 Γ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的紧可定向 C^2 超曲面。则有

$$\int_{\Gamma} \mathcal{K} \, d\mathcal{H}^2 = 2\pi \, \text{m}(\Gamma) + \int_{\partial\Gamma} \vec{\kappa}_{\partial\Gamma} \cdot \vec{\mu} \, d\mathcal{H}^1,$$

其中 $\vec{\mu}$ 为 $\partial\Gamma$ 的外单位余法向量, $\text{m}(\Gamma) \in \mathbb{Z}$ 为 Γ 的 Euler 示性数。

Euler 示性数的定义以及 Gauss–Bonnet 公式的证明可参阅 Kühnel (2015, §4F)。

第三章

参数有限元

本章讨论利用参数有限元对曲率驱动演化方程作数值逼近所需的主要概念。熟悉这些概念的读者，以及更关心本文具体有限元逼近的读者，可略过本章，直接阅读下文感兴趣的相应章节。

3.1 多面体曲面

为逼近光滑曲面，我们采用如下多面体曲面。利用多面体曲面逼近超曲面曲率驱动演化的思想可追溯至 Dziuk (1991)。

定义 41

- (i) 对于 $1 \leq n \leq d$ ，若子集 $\Gamma^h \subset \mathbb{R}^d$ 是有限个闭的非退化 n 单形之并，且任意两个单形的交或为空集，或为公共的 k 单形，其中 $0 \leq k < n$ ，则称其为 n 维**多面体曲面**，可带边界，也可无边界。
- (ii) 若 $n = d - 1$ ，则称 Γ^h 为**多面体超曲面**。
- (iii) 若 $n = 1$ ，则称 Γ^h 为**多边形曲线**。

注记 42

- (i) 将多面体曲面 Γ^h 视为 C^0 曲面，其边界按定义 17 定义，记为 $\partial\Gamma^h$ 。当然， $\partial\Gamma^h$ 是所有这样的 $(n - 1)$ 单形之并：在组成 Γ^h 的 n 单形中，恰有一个单形的边界包含该单形。若 $\partial\Gamma^h$ 为空集，则称 Γ^h 为闭多面体曲面。
- (ii) 对于带边界多面体超曲面 Γ^h ， Γ^h 的外余法向量在 $\partial\Gamma^h$ 上几乎处处有定义，局部使用定义 20 即可。

(iii) 为定义多面体曲面的几何量及其上的有限元空间, 通过剖分定义 Γ^h 往往较为方便。为此, 自此以后, 令 n 维多面体曲面由

$$\Gamma^h = \bigcup_{j=1}^J \overline{\sigma_j},$$

给出, 其中 $\{\sigma_j\}_{j=1}^J$ 是一族互不相交的 (相对) 开 n 单形; 对于 $i \neq j$, $\overline{\sigma_i} \cap \overline{\sigma_j}$ 或为空集, 或为 $\overline{\sigma_i}$ 与 $\overline{\sigma_j}$ 的一个公共 k 单形, 其中 $0 \leq k < n$ 。为供后文使用, 以 $\{\vec{q}_k\}_{k=1}^K$ 表示 Γ^h 的顶点, 并假设 σ_j 的顶点为 $\{\vec{q}_{j,k}\}_{k=1}^{n+1}$, 其中 $j = 1, \dots, J$ 。

定义 43 设 $\Gamma^h = \bigcup_{j=1}^J \overline{\sigma_j}$ 为注记 42(iii) 所述的 n 维多面体曲面, 顶点为 $\{\vec{q}_k\}_{k=1}^K$ 。

(i) 将 Γ^h 上连续分片线性函数的有限元空间定义为

$$\begin{aligned} V(\Gamma^h) &= \{\chi \in C(\Gamma^h) : \chi|_{\sigma_j} \text{ 对 } j = 1, \dots, J \text{ 为仿射的}\}, \\ \underline{V}(\Gamma^h) &= [V(\Gamma^h)]^d, \quad V(\Gamma^h) = [V(\Gamma^h)]^{d \times d}. \end{aligned}$$

以 $\{\phi_k^{\Gamma^h}\}_{k=1}^K$ 表示 $V(\Gamma^h)$ 的标准基, 即

$$\phi_i^{\Gamma^h}(\vec{q}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, K.$$

此外, 以 $\pi_{\Gamma^h} : C(\Gamma^h) \rightarrow V(\Gamma^h)$ 表示标准插值算子, 即

$$\pi_{\Gamma^h} \eta = \sum_{k=1}^K \eta(\vec{q}_k) \phi_k^{\Gamma^h} \quad \forall \eta \in C(\Gamma^h),$$

并类似地定义 $\bar{\pi}_{\Gamma^h} : [C(\Gamma^h)]^d \rightarrow \underline{V}(\Gamma^h)$ 。

(ii) 将 Γ^h 上的分片常值函数空间定义为

$$\begin{aligned} V_c(\Gamma^h) &= \{\chi \in L^\infty(\Gamma^h) : \chi|_{\sigma_j} \text{ 对 } j = 1, \dots, J \text{ 为常数}\}, \\ \underline{V}_c(\Gamma^h) &= [V_c(\Gamma^h)]^d, \quad V_c(\Gamma^h) = [V_c(\Gamma^h)]^{d \times d}. \end{aligned}$$

(iii) 以 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma^h}$ 表示 Γ^h 上的 L^2 内积, 以 $|\cdot|_{\Gamma^h}$ 表示相应的 L^2 范数; 并将这些定义推广至任意 n 维分片 C^1 曲面 Γ 。对于可在 $\{\sigma_j\}_{j=1}^J$ 的边上发生跳跃的分片连续函数 $u, v \in L^\infty(\Gamma^h)$, 引入质量集中内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma^h}^h$:

$$\langle u, v \rangle_{\Gamma^h}^h = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^J \mathcal{H}^n(\sigma_j) \sum_{k=1}^{n+1} (uv)((\vec{q}_{j,k})^-), \quad (15)$$

其中 $u((\vec{q})^-) = \lim_{\sigma_j \ni \vec{p} \rightarrow \vec{q}} u(\vec{p})$ 。定义 (15) 自然推广至向量值和张量值函数。再令

$$|u|_{\Gamma^h}^h = \left(\langle u, u \rangle_{\Gamma^h}^h \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

它在 $V(\Gamma^h)$ 上定义了由 (15) 诱导的范数。将 (16) 推广至向量值函数，便得到 $V(\Gamma^h)$ 上的范数。

注记 44 由定义 43 可得

$$\langle \eta, 1 \rangle_{\Gamma^h}^h = \langle \pi_{\Gamma^h} \eta, 1 \rangle_{\Gamma^h} \quad \forall \eta \in C(\Gamma^h).$$

3.1.1 定向 为讨论多面体超曲面的定向，先定义 $\mathbb{R}^d$ 中的楔积。

定义 45 设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{d-1} \in \mathbb{R}^d$ 。则**楔积**

$$\vec{z} = \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{d-1}$$

是满足如下条件的唯一向量 $\vec{z} \in \mathbb{R}^d$ ：对所有 $\vec{b} \in \mathbb{R}^d$ ，均有 $\vec{b} \cdot \vec{z} = \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{d-1}, \vec{b})$ 。

注记 46

- (i) 在 $\mathbb{R}^3$ 中，楔积是两个向量的通常叉积；在 $\mathbb{R}^2$ 中，则是将一个向量逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 所得的向量。
- (ii) 楔积 $\vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{d-1}$ 与 $(d-1)$ 个向量 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{d-1}$ 中的每一个均垂直，其长度等于这些向量所张成的平行多面体的体积。
- (iii) 顶点为 $\{\vec{q}_k\}_{k=1}^d$ 的 $(d-1)$ 单形 σ 的测度可由下式计算：

$$\mathcal{H}^{d-1}(\sigma) = \frac{1}{d-1} |(\vec{q}_2 - \vec{q}_1) \wedge \dots \wedge (\vec{q}_d - \vec{q}_1)|.$$

回顾 Matveev (2006, p. 20) 中可定向多面体超曲面的定义。

定义 47 若可以一致地给单形 $\{\sigma_j\}_{j=1}^J$ 定向，则称多面体超曲面 $\Gamma^h = \bigcup_{j=1}^J \overline{\sigma_j}$ **可定向**。例如，对各个 σ_j 、 $j = 1, \dots, J$ 的顶点选取次序 $\{\vec{q}_{j,k}\}_{k=1}^d$ ，使得在构成 $(d-2)$ 单形的非空交集 $\overline{\sigma_i} \cap \overline{\sigma_j}$ 上，由 σ_i 和 σ_j 诱导的两个定向彼此相反。

注记 48 对于 $\mathbb{R}^3$ 中的多面体超曲面，为每个三角形选取沿其边界绕行的方向，就给了该三角形的定向，并给其每条边赋予一个方向。若能使两个相邻三角形在公共边上诱导的方向总是相反，则该曲面可定向。 $\mathbb{R}^3$ 中不可定向多面体超曲面的一个例子是 Möbius 带的三角剖分。当然，当 $d = 2$ 时，所考虑的是多边形曲线，它们总是可定向的。

定义 49 设可定向多面体超曲面 Γ^h 由 $\Gamma^h = \bigcup_{j=1}^J \overline{\sigma_j}$ 给出，对每个 σ_j ，其中 $j =$

$1, \dots, J$, 其顶点 $\{\vec{q}_{j,k}\}_{k=1}^d$ 均已一致排序。于是, 按下式定义一致的分片常值单位法向量 $\vec{\nu}^h \in \underline{V}_c(\Gamma^h)$:

$$\vec{\nu}^h = \frac{(\vec{q}_{j,2} - \vec{q}_{j,1}) \wedge \cdots \wedge (\vec{q}_{j,d} - \vec{q}_{j,1})}{|(\vec{q}_{j,2} - \vec{q}_{j,1}) \wedge \cdots \wedge (\vec{q}_{j,d} - \vec{q}_{j,1})|} \quad \text{在 } \sigma_j,$$

$j = 1, \dots, J$, 参见定义 45。

注记 50 当然, 改变 Γ^h 的定向会改变 $\vec{\nu}^h$ 的符号。对本文介绍的大多数逼近而言, 法向量的选取并不重要。在 $\vec{\nu}^h$ 的符号对结果有关键影响的情形下, 我们将明确说明其选取。

定义 51 设 Γ^h 为具有单位法向量 $\vec{\nu}^h$ 的可定向多面体超曲面。定义顶点法向量 $\vec{\omega}^h \in \underline{V}(\Gamma^h)$ 为 $\vec{\nu}^h$ 到 $\underline{V}(\Gamma^h)$ 的质量集中 L^2 投影, 即

$$\langle \vec{\omega}^h, \vec{\varphi} \rangle_{\Gamma^h}^h = \langle \vec{\nu}^h, \vec{\varphi} \rangle_{\Gamma^h} \quad \forall \vec{\varphi} \in \underline{V}(\Gamma^h). \quad (17)$$

注记 52 容易看出, 对于 $k = 1, \dots, K$, 有

$$\vec{\omega}^h(\vec{q}_k) = \frac{1}{\mathcal{H}^{d-1}(\Lambda_k)} \sum_{\sigma_j \in \mathcal{T}_k} \mathcal{H}^{d-1}(\sigma_j) \vec{\nu}_{|\sigma_j}^h, \quad (18)$$

其中

$$\Lambda_k = \bigcup_{\sigma_j \in \mathcal{T}_k} \overline{\sigma_j} \quad \text{和} \quad \mathcal{T}_k = \{\sigma_j : \vec{q}_k \in \overline{\sigma_j}\}.$$

特别地, 可将 $\vec{\omega}^h(\vec{q}_k)$ 理解为 Γ^h 在顶点 $\vec{q}_k$ 处的加权法向量。由 (15) 和 (17) 可得

$$\langle \chi \vec{\omega}^h, \vec{\varphi} \rangle_{\Gamma^h}^h = \langle \chi \vec{\nu}^h, \vec{\varphi} \rangle_{\Gamma^h}^h \quad \forall \chi \in V(\Gamma^h), \vec{\varphi} \in \underline{V}(\Gamma^h). \quad (19)$$

合并 (19) 与 (17), 得到

$$\langle \vec{\omega}^h, \vec{\varphi} \rangle_{\Gamma^h}^h = \langle \vec{\nu}^h, \vec{\varphi} \rangle_{\Gamma^h}^h = \langle \vec{\nu}^h, \vec{\varphi} \rangle_{\Gamma^h} \quad \forall \vec{\varphi} \in \underline{V}(\Gamma^h). \quad (20)$$

3.1.2 多边形曲线 当 Γ^h 为多边形曲线时, 上述定义大多显著简化。给定闭多边形曲线 $\Gamma^h = \bigcup_{j=1}^J \overline{\sigma_j}$, 可以利用周期单位区间 $\mathbb{I} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的有限元函数参数化 Γ^h 。

定义 53 设 $\mathbb{I} = \bigcup_{j=1}^J I_j$ 由节点 $q_j = jh$, $h = J^{-1}$ 分解为区间 $I_j = [q_{j-1}, q_j]$, 其中 $j = 0, \dots, J$ 。利用 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的周期性, 即 $q_J = q_0$, $q_{J+1} = q_1$, 依此类推。

(i) 将 $\mathbb{I}$ 中周期连续分片线性函数的有限元空间定义为

$$V^h(\mathbb{I}) = \{\chi \in C(\mathbb{I}) : \chi|_{I_j} \text{ 对 } j = 1, \dots, J \text{ 为仿射的}\},$$

$$\underline{V}^h(\mathbb{I}) = [V^h(\mathbb{I})]^d.$$

(ii) 以 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{I}}$ 表示 $\mathbb{I}$ 上的 L^2 内积。对于可在节点 $\{q_j\}_{j=1}^J$ 处发生跳跃的分片连续函数 $u, v \in L^\infty(\mathbb{I})$, 引入 $\mathbb{I}$ 上的**质量集中内积**:

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{I}}^h = \frac{1}{2} h \sum_{j=1}^J [(u v)(q_j^-) + (u v)(q_{j-1}^+)].$$

注记 54 给定闭多边形曲线 $\Gamma^h = \bigcup_{j=1}^J \overline{\sigma_j}$, 现在可以找到满足 $\Gamma^h = \vec{X}^h(\mathbb{I})$ 的函数 $\vec{X}^h \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ 。则有以下性质。

(i) 由注记 8(i), 对于 $j = 1, \dots, J$, 有

$$\begin{aligned} (\nabla_s f) \circ \vec{X}^h &= \partial_s (f \circ \vec{X}^h) \vec{X}_s^h && \text{于 } I_j, \\ (\nabla_s \cdot \vec{f}) \circ \vec{X}^h &= \partial_s (\vec{f} \circ \vec{X}^h) \cdot \vec{X}_s^h && \text{于 } I_j, \end{aligned}$$

其中 $\vec{X}_s^h = \partial_s \vec{X}^h$, $\partial_s = |\partial_1 \vec{X}^h|^{-1} \partial_1$ 表示对 Γ^h 的弧长求导。自此以后, 使用简写 $\vec{X}_\rho^h = \partial_1 \vec{X}^h$, 即 $\rho \in \mathbb{I}$ 充当参数化变量。

(ii) 有

$$\langle f, 1 \rangle_{\Gamma^h} = \left\langle f \circ \vec{X}^h, |\vec{X}_\rho^h| \right\rangle_{\mathbb{I}} \quad \text{和} \quad \langle f, 1 \rangle_{\Gamma^h}^h = \left\langle f \circ \vec{X}^h, |\vec{X}_\rho^h| \right\rangle_{\mathbb{I}}^h.$$

(iii) 对于按定义 49 及注记 46(i) 定义的 Γ^h 上的法向量 $\vec{\nu}^h$, 当 $\overline{\sigma_j} = [\vec{q}_{j,1}^h, \vec{q}_{j,2}^h] = [\vec{X}^h(q_{j-1}), \vec{X}^h(q_j)]$ 时, 有

$$\vec{\nu}^h \circ \vec{X}^h = -(\vec{X}_s^h)^\perp \quad \text{于 } I_j, \quad (21)$$

其中 $j = 1, \dots, J$ 。这里, 作用于 $\mathbb{R}^2$ 的 $\cdot^\perp$ 表示顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 。

(iv) 为得到定义 51 中 Γ^h 上顶点法向量 $\vec{\omega}^h$ 的简单表达式, 令 $\vec{h}_j = \vec{X}^h(q_j) - \vec{X}^h(q_{j-1})$, 其中 $j = 1, \dots, J+1$; 由定义 41(i), 它们均非零。于是 (21) 化为

$$(\vec{\nu}^h \circ \vec{X}^h)|_{I_j} = \vec{\nu}_j^h = -\frac{\vec{h}_j^\perp}{|\vec{h}_j|} \quad j = 1, \dots, J+1.$$

再由 (18), 得到加权顶点法向量

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^h(\vec{X}^h(q_j)) &= \frac{|\vec{h}_j| \vec{\nu}_j^h + |\vec{h}_{j+1}| \vec{\nu}_{j+1}^h}{|\vec{h}_j| + |\vec{h}_{j+1}|} = -\frac{(\vec{h}_j + \vec{h}_{j+1})^\perp}{|\vec{h}_j| + |\vec{h}_{j+1}|} \\ &= -\frac{(\vec{X}^h(q_{j+1}) - \vec{X}^h(q_{j-1}))^\perp}{|\vec{h}_j| + |\vec{h}_{j+1}|} \quad j = 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (22)$$

3.2 稳定性估计

引理 55 设 $\Gamma^h = \bigcup_{j=1}^J \overline{\sigma_j}$ 为二维多面体曲面。则对于 $j = 1, \dots, J$, 有

$$\frac{1}{2} \int_{\sigma_j} |\nabla_s \vec{X}|^2 d\mathcal{H}^2 \geq \mathcal{H}^2(\vec{X}(\sigma_j)) \quad \forall \vec{X} \in \underline{V}(\Gamma^h) \quad (23)$$

当 $\vec{X} = \vec{\text{id}}|_{\Gamma^h} \in \underline{V}(\Gamma^h)$ 时取等号。

证明 注意到 (23) 中的被积函数均为常值。特别地, 由定义 5(iv), 对于 $\vec{X} \in \underline{V}(\Gamma^h)$, 有

$$\nabla_s \vec{X} = \sum_{i=1}^2 (\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{X}) \otimes \vec{\tau}_i \quad \text{和} \quad |\nabla_s \vec{X}|^2 = \sum_{i=1}^2 |\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{X}|^2 \quad \text{在 } \sigma_j, \quad (24a)$$

因而

$$\nabla_s \vec{\text{id}} = \sum_{i=1}^2 \vec{\tau}_i \otimes \vec{\tau}_i \quad \text{和} \quad |\nabla_s \vec{\text{id}}|^2 = 2 \quad \text{在 } \sigma_j, \quad (24b)$$

其中 $\{\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2\}$ 为 σ_j 的切平面的一组标准正交基。此外, 有

$$\mathcal{H}^2(\vec{X}(\sigma_j)) = \int_{\sigma_j} \sqrt{g} d\mathcal{H}^2, \quad (25)$$

其中, 与 (7) 和 (2) 类似,

$$g = \det \left(\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{X} \cdot \partial_{\vec{\tau}_j} \vec{X} \right)_{i,j=1,2} = |\partial_{\vec{\tau}_1} \vec{X}|^2 |\partial_{\vec{\tau}_2} \vec{X}|^2 - \left(\partial_{\vec{\tau}_1} \vec{X} \cdot \partial_{\vec{\tau}_2} \vec{X} \right)^2.$$

再注意到

$$\sqrt{g} \leq |\partial_{\vec{\tau}_1} \vec{X}| |\partial_{\vec{\tau}_2} \vec{X}| \leq \frac{1}{2} \left(|\partial_{\vec{\tau}_1} \vec{X}|^2 + |\partial_{\vec{\tau}_2} \vec{X}|^2 \right), \quad (26)$$

且取等号当且仅当 $\partial_{\vec{\tau}_1} \vec{X} \cdot \partial_{\vec{\tau}_2} \vec{X} = 0$ 和 $|\partial_{\vec{\tau}_1} \vec{X}| = |\partial_{\vec{\tau}_2} \vec{X}|$ 。合并 (24)、(25) 与 (26), 便立即得到所需结论 (23)。□

注记 56 对于满足 $n \neq 2$ 的 n 维多面体曲面, 引理 55 那样的结论不成立。此时

$$\mathcal{H}^n(\vec{X}(\sigma_j)) = \int_{\sigma_j} \sqrt{g} d\mathcal{H}^n,$$

其中 $g = \det \left(\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{X} \cdot \partial_{\vec{\tau}_j} \vec{X} \right)_{i,j=1,\dots,n}$, $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n\}$ 为 σ_j 的切空间的一组标准正交基;

它关于 $\vec{X}$ 按 n 次幂缩放。而

$$|\nabla_s \vec{X}|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \partial_{\vec{\tau}_i} \vec{X} \right|^2$$

按二次幂缩放。因此，简单的尺度分析表明，不可能存在常数 c_0 ，使得

$$c_0 \int_{\sigma_j} |\nabla_s \vec{X}|^2 d\mathcal{H}^n \geq \mathcal{H}^n(\vec{X}(\sigma_j)) \quad \forall \vec{X} \in \underline{V}(\Gamma^h).$$

这说明引理 55 中的估计仅适用于二维多面体曲面。

尽管有上面的注，我们仍能证明以下关键的稳定性界。后文将在 $n = 1$ 和 $n = 2$ 两种情形下广泛使用它。

引理 57 设 $\Gamma^h = \bigcup_{j=1}^J \bar{\sigma}_j$ 为 n 维多面体曲面， $\vec{X} \in \underline{V}(\Gamma^h)$ 。当 $n = 1$ 时，有

$$\left\langle \nabla_s \vec{X}, \nabla_s (\vec{X} - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma^h} \geq \mathcal{H}^1(\vec{X}(\Gamma^h)) - \mathcal{H}^1(\Gamma^h) + \left| |\nabla_s \vec{X}| - 1 \right|_{\Gamma^h}^2.$$

此外，当 $n = 2$ 时，有

$$\left\langle \nabla_s \vec{X}, \nabla_s (\vec{X} - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma^h} \geq \mathcal{H}^2(\vec{X}(\Gamma^h)) - \mathcal{H}^2(\Gamma^h) + \frac{1}{2} \left| \nabla_s (\vec{X} - \text{id}) \right|_{\Gamma^h}^2.$$

证明 对于 $n = 2$ ，由引理 55 可得

$$\begin{aligned} & \left\langle \nabla_s \vec{X}, \nabla_s (\vec{X} - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma^h} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left| \nabla_s \vec{X} \right|_{\Gamma^h}^2 - \left| \nabla_s \text{id} \right|_{\Gamma^h}^2 + \left| \nabla_s (\vec{X} - \text{id}) \right|_{\Gamma^h}^2 \right] \\ &\geq \mathcal{H}^2(\vec{X}(\Gamma^h)) - \mathcal{H}^2(\Gamma^h) + \frac{1}{2} \left| \nabla_s (\vec{X} - \text{id}) \right|_{\Gamma^h}^2. \end{aligned}$$

对于 $n = 1$ ，令 $\vec{h}_j = \vec{q}_{j,2} - \vec{q}_{j,1}$ ，并类似地令 $\vec{h}_j^{\vec{X}} = \vec{X}(\vec{q}_{j,2}) - \vec{X}(\vec{q}_{j,1})$ ，其中 $j = 1, \dots, J$ 。采用 Dziuk (1999b, 定理 2) 中的思路，由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_s \vec{X}, \nabla_s (\vec{X} - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma^h} &= \sum_{j=1}^J \left[\frac{|\vec{h}_j^{\vec{X}}|^2 - \vec{h}_j^{\vec{X}} \cdot \vec{h}_j}{|\vec{h}_j|} \right] \\ &= \sum_{j=1}^J \left[\frac{(|\vec{h}_j^{\vec{X}}| - |\vec{h}_j|)^2 + |\vec{h}_j^{\vec{X}}| |\vec{h}_j| - \vec{h}_j^{\vec{X}} \cdot \vec{h}_j}{|\vec{h}_j|} + |\vec{h}_j^{\vec{X}}| - |\vec{h}_j| \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{j=1}^J \left[|\vec{h}_j^{\vec{X}}| - |\vec{h}_j| + \left(\frac{|\vec{h}_j^{\vec{X}}|}{|\vec{h}_j|} - \frac{|\vec{h}_j|}{|\vec{h}_j|} \right)^2 |\vec{h}_j| \right] \\
&= \mathcal{H}^1(\vec{X}(\Gamma^h)) - \mathcal{H}^1(\Gamma^h) + \left| |\nabla_s \vec{X}| - 1 \right|_{\Gamma^h}^2.
\end{aligned} \tag{27}$$

□

引理 57 的结论适用于半隐式时间离散。对于全隐式离散，需要如下结论。

引理 58 设 $\Gamma^h = \bigcup_{j=1}^J \bar{\sigma}_j$ 为多边形曲线， $\vec{X} \in \underline{V}(\Gamma^h)$ 。则有

$$\left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s (\text{id} - \vec{X}) \right\rangle_{\Gamma^h} \geq \mathcal{H}^1(\Gamma^h) - \mathcal{H}^1(\vec{X}(\Gamma^h)).$$

证明 沿用引理 57 证明中的记号，有

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s (\text{id} - \vec{X}) \right\rangle_{\Gamma^h} &= \sum_{j=1}^J \left[\frac{|\vec{h}_j|^2 - \vec{h}_j \cdot \vec{h}_j^{\vec{X}}}{|\vec{h}_j|} \right] \\
&\geq \sum_{j=1}^J \left[|\vec{h}_j| - |\vec{h}_j^{\vec{X}}| \right] = \mathcal{H}^1(\Gamma^h) - \mathcal{H}^1(\vec{X}(\Gamma^h)).
\end{aligned}$$

□

注记 59 对于满足 $n > 1$ 的 n 维多面体曲面，与引理 58 类似的结论不成立。为说明这一点，构造如下反例。设 Γ^h 由单个 n 单形组成， $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n\}$ 为 Γ^h 的切空间的一组标准正交基。现选取 $\vec{X} \in \underline{V}(\Gamma^h)$ ，使 $\partial_{\vec{\tau}_1} \vec{X} = \alpha \vec{\tau}_1$ 及 $\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{X} = \varepsilon \vec{\tau}_i$ ， $i = 2, \dots, n$ 成立，其中 $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ 。则有 $\mathcal{H}^n(\vec{X}(\Gamma^h)) = \int_{\Gamma^h} \sqrt{\det \left(\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{X} \cdot \partial_{\vec{\tau}_j} \vec{X} \right)_{i,j=1,\dots,n}} d\mathcal{H}^n = \alpha \varepsilon^{n-1} \mathcal{H}^n(\Gamma^h)$ 。此外，在 Γ^h 上有 $|\nabla_s \text{id}|^2 = n$ 和 $\nabla_s \text{id} : \nabla_s \vec{X} = \alpha + (n-1)\varepsilon$ ，因而

$$\left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s (\text{id} - \vec{X}) \right\rangle_{\Gamma^h} \geq \mathcal{H}^n(\Gamma^h) - \mathcal{H}^n(\vec{X}(\Gamma^h))$$

等价于 $n - (\alpha + (n-1)\varepsilon) \geq 1 - \alpha \varepsilon^{n-1}$ ，进而等价于 $(n-1)(1-\varepsilon) \geq \alpha(1-\varepsilon^{n-1})$ 。取 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $\alpha > (n-1) \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon^{n-1}}$ ，便得到矛盾。

3.3 曲率逼近

给定多面体超曲面 $\Gamma^h = \bigcup_{j=1}^J \bar{\sigma}_j$ ，由定义 5 显然可知，一阶微分算子在 Γ^h 上几乎处处有定义，例如可作用于 $V(\Gamma^h)$ 或 $\underline{V}(\Gamma^h)$ 中的函数。二阶算子则不然。

因此，须以适当方式定义离散曲率逼近。以下均假设 Γ^h 为闭超曲面。

一种方式是按下式定义离散 Laplace–Beltrami 算子 $\Delta_s^{\Gamma^h} : V(\Gamma^h) \rightarrow V(\Gamma^h)$ ：

$$\left\langle \Delta_s^{\Gamma^h} \chi, \zeta \right\rangle_{\Gamma^h}^h = - \left\langle \nabla_s \chi, \nabla_s \zeta \right\rangle_{\Gamma^h} \quad \forall \zeta \in V(\Gamma^h), \quad (28)$$

这是注记 22(i) 的离散对应。照例，对于 $\bar{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^h)$ ，按分量定义 $\Delta_s^{\Gamma^h} \bar{\chi}$ 。于是，曲率向量的一种可能逼近为 $\bar{\kappa}^h = \Delta_s^{\Gamma^h} \text{id}$ ，参见引理 13(ii)；即 $\bar{\kappa}^h \in \underline{V}(\Gamma^h)$ 为下列问题的唯一解：

$$\left\langle \bar{\kappa}^h, \bar{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h}^h = - \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \bar{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h} \quad \forall \bar{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h). \quad (29)$$

当然， $\bar{\kappa}^h$ 既给出了平均曲率的逼近，也给出了一种顶点法向方向；该方向一般不同于定义 51 所定义的方向。

对某些特殊的多面体超曲面，平均曲率还可采用另一种定义。

定义 60 设 Γ^h 为具有单位法向量 $\bar{\nu}^h$ 的闭可定向多面体超曲面。若存在 $\kappa^h \in V(\Gamma^h)$ ，使

$$\left\langle \kappa^h \bar{\nu}^h, \bar{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h}^h = - \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \bar{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h} \quad \forall \bar{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h). \quad (30)$$

则称其为**共形多面体超曲面**。

注记 61

- (i) 对于共形多面体超曲面 Γ^h ，(29) 中的 $\bar{\kappa}^h$ 与定义 51 中的 $\bar{\omega}^h$ 所定义的两个顶点法向方向一致，即这两个向量在 Γ^h 的每个顶点处均平行。特别地，由 (19) 可得

$$\bar{\pi}_{\Gamma^h} [\kappa^h \bar{\omega}^h] = \bar{\kappa}^h.$$

- (ii) Barrett et al. (2008b, §4.1) 指出，当 $d = 3$ 时，(i) 中的几何性质意味着 Γ^h 的剖分具有良好的网格质量。当 $d = 2$ 时，任何共形多边形曲线均具有弱等分布性质，见以下定理。

定理 62 设 Γ^h 为定义 60 意义下 $\mathbb{R}^2$ 中的闭共形多边形曲线。则 Γ^h 上任意两个相邻单元或长度相等，或彼此平行。

证明 选取满足 $\Gamma^h = \bar{X}^h(\mathbb{I})$ 的 $\bar{X}^h \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ 。由注记 54 及定义 60，存在 $\kappa^h \in V^h(\mathbb{I})$ ，

使

$$\left\langle \kappa^h \bar{\omega}^h \circ \bar{X}^h, \bar{\eta} |\bar{X}_\rho^h| \right\rangle_{\mathbb{I}}^h = - \left\langle \bar{X}_s^h, \bar{\eta}_s |\bar{X}_\rho^h| \right\rangle_{\mathbb{I}}^h \quad \forall \bar{\eta} \in \underline{V}^h(\mathbb{I}). \quad (31)$$

采用注记 54(iv) 中的记号, 固定 $j \in \{1, \dots, J\}$, 则须证明

$$|\vec{h}_j| = |\vec{h}_{j+1}| \quad \text{若} \quad \vec{h}_j \nparallel \vec{h}_{j+1}. \quad (32)$$

由定义 41(i), $\vec{h}_j$ 与 $\vec{h}_{j+1}$ 均非零。若 $\vec{h}_j + \vec{h}_{j+1} = \vec{0}$, 则 (32) 直接成立; 否则, 由 (22) 有

$$\bar{\omega}^h(\bar{X}^h(q_j)) = - \frac{\left(\bar{X}^h(q_{j+1}) - \bar{X}^h(q_{j-1}) \right)^\perp}{|\vec{h}_j| + |\vec{h}_{j+1}|}.$$

因此, 在 (31) 中选取 $\bar{\eta} \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$, 使对于 $i = 1, \dots, J$, 有

$$\bar{\eta}(q_i) = \delta_{ij} \left(\bar{X}^h(q_{j+1}) - \bar{X}^h(q_{j-1}) \right) = \delta_{ij} \left(\vec{h}_j + \vec{h}_{j+1} \right),$$

, 则得到

$$0 = \left(\frac{|\vec{h}_{j+1}|}{|\vec{h}_{j+1}|} - \frac{|\vec{h}_j|}{|\vec{h}_j|} \right) \cdot \left(\vec{h}_j + \vec{h}_{j+1} \right) = \frac{|\vec{h}_{j+1}| - |\vec{h}_j|}{|\vec{h}_j| |\vec{h}_{j+1}|} \left(|\vec{h}_j| |\vec{h}_{j+1}| - \vec{h}_j \cdot \vec{h}_{j+1} \right).$$

若 $\vec{h}_j$ 与 $\vec{h}_{j+1}$ 不平行, Cauchy-Schwarz 不等式便蕴含 $|\vec{h}_j| = |\vec{h}_{j+1}|$. $\square$

对于不满足定义 60 中特殊性质的多面体超曲面, 可如下引入离散平均曲率: 求 $(\bar{X}, \kappa^h) \in \underline{V}(\Gamma^h) \times V(\Gamma^h)$, 使得

$$\left\langle \bar{X} - \text{id}, \chi \bar{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h}^h = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^h), \quad (33a)$$

$$\left\langle \kappa^h \bar{\nu}^h, \bar{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h}^h + \left\langle \nabla_s \bar{X}, \nabla_s \bar{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h} = 0 \quad \forall \bar{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h). \quad (33b)$$

注记 63

- (i) 方程组 (33) 可视为 (30) 的线性化; 在某种意义上, 我们容许通过沿切向移动顶点, 使 Γ^h 发生微小形变。
- (ii) 若 $(\text{id}|_{\Gamma^h}, \kappa^h) \in \underline{V}(\Gamma^h) \times V(\Gamma^h)$ 满足 (33), 则 κ^h 满足 (30), 因而 Γ^h 为共形多面体超曲面。

在一个较弱的假设下, 方程组 (33) 存在唯一解。

假设 64 设 Γ^h 为可定向多面体超曲面, 具有单位法向量 $\bar{\nu}^h$ 与顶点法向量 $\bar{\omega}^h \in \underline{V}(\Gamma^h)$ 。

- (i) 设 $\dim \text{span}\{\bar{\omega}^h(\vec{q}_k)\}_{k=1}^K = d$ 。

(ii) 设 $\vec{\omega}^h(\vec{q}_k) \neq \vec{0}$ 、 $k = 1, \dots, K$ 。

注记 65 假设 64(i) 意味着 Γ^h 的离散顶点法向量张成整个空间 $\mathbb{R}^d$ 。由 (17) 可知, 假设 64(i) 等价于 $\dim \left\{ \int_{\Gamma^h} \chi \vec{\nu}^h d\mathcal{H}^{d-1} : \chi \in V(\Gamma^h) \right\} = d$ 。显然, 仅在极少数情形下假设 64 不成立。例如, 对于无自交的曲面 Γ^h , 该假设总成立。

引理 66 设 Γ^h 满足假设 64, 则 (33) 存在唯一解 $(\vec{X}, \kappa^h) \in \underline{V}(\Gamma^h) \times V(\Gamma^h)$ 。

证明 由于 (33) 是线性方程组, 且未知量个数等于方程个数, 只需证明唯一性。因此考虑齐次方程组, 并设 $(\vec{X}_0, \kappa_0) \in \underline{V}(\Gamma^h) \times V(\Gamma^h)$ 满足

$$\left\langle \vec{X}_0, \chi \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h}^h = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^h), \quad (34a)$$

$$\left\langle \kappa_0 \vec{\nu}^h, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}_0, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h). \quad (34b)$$

在 (34a) 中取 $\chi = \kappa_0 \in V(\Gamma^h)$, 在 (34b) 中取 $\vec{\eta} = \vec{X}_0 \in \underline{V}(\Gamma^h)$, 得 $|\nabla_s \vec{X}_0|_{\Gamma^h}^2 = 0$ 。从而 $\vec{X}_0$ 为常值, 即在 Γ^h 上有 $\vec{X}_0 = \vec{X}^c$, 其中 $\vec{X}^c \in \mathbb{R}^d$ 。特别地, 在 (34b) 中取 $\vec{\eta} = \vec{\pi}_{\Gamma^h}[\kappa_0 \vec{\omega}^h]$, 由 (19) 和 (16) 得

$$0 = \left\langle \kappa_0 \vec{\omega}^h, \kappa_0 \vec{\omega}^h \right\rangle_{\Gamma^h}^h = \left(|\kappa_0 \vec{\omega}^h|_{\Gamma^h}^h \right)^2,$$

因而 $\vec{\pi}_{\Gamma^h}[\kappa_0 \vec{\omega}^h] = \vec{0}$ 。假设 64(ii) 进而给出 $\kappa_0 = 0$ 。此外, 由 (34a) 及 (20) 得

$$0 = \left\langle \vec{X}^c, \chi \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h}^h = \left\langle \vec{X}^c, \chi \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h} = \vec{X}^c \cdot \int_{\Gamma^h} \chi \vec{\nu}^h d\mathcal{H}^{d-1} \quad \forall \chi \in V(\Gamma^h),$$

因此, 由假设 64(i) 及注记 65 得 $\vec{X}^c = \vec{0}$ 。由此证明了 (33) 存在唯一解 $(\vec{X}, \kappa^h) \in \underline{V}(\Gamma^h) \times V(\Gamma^h)$ 。□

借助 Weingarten 映射的逼近, 还可得到其他离散曲率逼近, 参见定义 10 及引理 12。特别地, 利用注记 22(v), 得到以下对 $\nabla_s \vec{\nu}$ 的离散化; 该方法源于 Heine (2004, (3.2))。给定闭多面体超曲面 Γ^h 以及曲率向量逼近 $\vec{\kappa}^h \in \underline{V}(\Gamma^h)$, 求 $W^h \in V(\Gamma^h)$, 使得

$$\left\langle W^h, \chi \right\rangle_{\Gamma^h} = - \left\langle \vec{\kappa}^h, \chi \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h} - \left\langle \vec{\nu}^h, \nabla_s \cdot \chi \right\rangle_{\Gamma^h} \quad \forall \chi \in V(\Gamma^h). \quad (35a)$$

例如, $\vec{\kappa}^h$ 可由 (29) 定义, 也可通过不作质量集中的 (29) 定义, 后者对应于 Heine (2004, (3.1)) 的选取。注意到, W^h 未必对称, 而 $\nabla_s \vec{\nu}$ 对称, 参见引理 12(ii)。对 $\nabla_s \vec{\nu}$ 的另一种逼近, 是将 (35a) 替换为

$$\left\langle W^h, \chi \right\rangle_{\Gamma^h}^h = -\frac{1}{2} \left\langle \vec{\nu}^h, (\chi + \chi^\top) \vec{\kappa}^h + \nabla_s \cdot (\chi + \chi^\top) \right\rangle_{\Gamma^h}^h \quad \forall \chi \in V(\Gamma^h), \quad (35b)$$

由此得到 $(W^h)^\top = W^h$ 。例如, Barrett et al. (2017b, (4.12b)) 中即考虑了这种逼近。

Barrett et al. (2008d) 使用了 (35a) 的一个略作修改的版本, 具体如下: 给定 Γ^h 和平均曲率逼近 $\kappa^h \in V(\Gamma^h)$, 求 $W^h \in V(\Gamma^h)$, 使得

$$\langle W^h, \chi \rangle_{\Gamma^h}^h = -\langle \kappa^h \bar{\nu}^h, \chi \bar{\nu}^h \rangle_{\Gamma^h}^h - \langle \bar{\nu}^h, \nabla_s \cdot \chi \rangle_{\Gamma^h} \quad \forall \chi \in V(\Gamma^h). \quad (35c)$$

最后, $\nabla_s \bar{\nu}$ 的分片常值逼近可定义为

$$\nabla_s \bar{\omega}^h \in V_c(\Gamma^h) \quad \text{和} \quad \nabla_s \left(\bar{\pi}_{\Gamma^h} \frac{\bar{\omega}^h}{|\bar{\omega}^h|} \right) \in V_c(\Gamma^h), \quad (35d)$$

其中后者显然需要假设 64(ii) 成立; 例如 Barrett et al. (2008d) 中已采用了这一逼近。注意到, (35d) 中的两种逼近一般均不对称。

注记 67 对于曲线情形 $d = 2$, 采用第 3.1.2 节的记号, 令 $\Gamma^h = \bar{X}^h(\mathbb{I})$, 其中 $\bar{X}^h \in V^h(\mathbb{I})$ 插值 $\bar{x}$, 且 $\Gamma = \bar{x}(\mathbb{I})$ 。Deckelnick and Dziuk (2009, 引理 2.2) 证明, 对于光滑的 Γ , (29) 中的逼近 $\bar{\kappa}^h$ 在 $[L^2(\mathbb{I})]^2$ 中以 $O(h)$ 阶逼近 Γ 的真实曲率向量 $\bar{\kappa}$ 。遗憾的是, 对于 $d = 3$ 的情形, Heine (2004) 证明了 (29) 和 (35a) 在一般网格上不收敛, 亦见 Hildebrandt et al. (2006)。从 Barrett et al. (2008d, §4.2.1) 的数值实验中可得到类似结论, 这些结论也适用于 (35b) 和 (35c)。不过, 逼近 (35d) 和 (33) 在实际计算中表现较好; 关于与其密切相关的逼近, 分别参见 Barrett et al. (2008d) 中的表 2、5 和表 3、6。此外, 对 Γ 和 $\bar{\kappa}$ 的高阶分片多项式逼近, 可以证明收敛性, 参见 Heine (2004)。尽管对连续分片线性函数, (29) 可能不收敛, 但将这种逼近用于几何流的逼近时, 却可以得到收敛性; 例如参见下文第 4.7.1 节。

3.4 演化多面体曲面与输运定理

现定义演化超曲面、其速度场与物质导数的离散对应。更多细节可参阅 Dziuk and Elliott (2013, §5.4)。

定义 68

- (i) 设 $(\Gamma^h(t))_{t \in [0, T]}$ 为一族多面体超曲面, 每个 $\Gamma^h(t)$ 均具有注记 42(iii) 所述形式的剖分, 其中 J 和 K 固定不变, 且每个顶点 $\bar{q}_k$ 的位置均为时间的 C^1 函数, 其中 $k = 1, \dots, K$ 。于是, 集合

$$\mathcal{G}_T^h = \bigcup_{t \in [0, T]} (\Gamma^h(t) \times \{t\})$$

称为演化多面体超曲面。我们常将 $\mathcal{G}_T^h$ 与

$(\Gamma^h(t))_{t \in [0, T]}$ 等同, 并也称后者为演化多面体超曲面。

(ii) $\Gamma^h(t)$ 在 $\mathcal{G}_T^h$ 上的速度定义为

$$\vec{V}^h(\vec{z}, t) = \sum_{k=1}^K \left[\frac{d}{dt} \vec{q}_k(t) \right] \phi_k^{\Gamma^h(t)}(\vec{z}) \quad \forall (\vec{z}, t) \in \mathcal{G}_T^h,$$

这里沿用定义 43(i) 中的记号。

(iii) 定义有限元空间

$$V(\mathcal{G}_T^h) = \{\chi \in C(\mathcal{G}_T^h) : \chi(\cdot, t) \in V(\Gamma^h(t)) \quad \forall t \in [0, T]\}$$

以及 $\underline{V}(\mathcal{G}_T^h) = [V(\mathcal{G}_T^h)]^d$ 。

(iv) 设 $f \in L^\infty(\mathcal{G}_T^h)$, 且对于 $j = 1, \dots, J$, 有 $f \in C^1(\mathcal{S}_{j,T}^h)$, 其中

$$\mathcal{S}_{j,T}^h = \bigcup_{t \in [0, T]} (\overline{\sigma_j(t)} \times \{t\})$$

是 C^1 演化超曲面。对于 $j \in \{1, \dots, J\}$, 设 $\vec{x} : \Upsilon \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为 $\mathcal{S}_{j,T}^h$ 的整体参数化, 使得 $\vec{x}(\cdot, t) : \Upsilon \rightarrow \overline{\sigma_j(t)}$ 为仿射函数。于是, f 的离散时间导数定义为

$$\partial_t^{\circ, h} f = \partial_t^\circ f \quad \text{在 } \mathcal{S}_{j,T}^h,$$

参见定义 28(i)。

(v) 定义有限元空间

$$V_T(\mathcal{G}_T^h) = \{\chi \in V(\mathcal{G}_T^h) : \partial_t^{\circ, h} \chi \in C(\mathcal{G}_T^h)\}$$

及 $\underline{V}_T(\mathcal{G}_T^h) = [V_T(\mathcal{G}_T^h)]^d$, 其中的函数是 $\mathcal{G}_T^h$ 上具有连续物质导数的有限元函数。

注记 69

(i) 引入简写 $\phi_k^h(\cdot, t) = \phi_k^{\Gamma^h(t)}$, 则有

$$\partial_t^{\circ, h} \phi_k^h = 0 \quad \text{在 } \mathcal{G}_T^h, \quad k = 1, \dots, K.$$

(ii) 一般而言, 离散物质导数 $\partial_t^{\circ, h} f$ 仅在 $\mathcal{G}_T^h$ 上分片定义。不过, (i) 的一个直接推论是: 对于 $\chi \in V(\mathcal{G}_T^h)$, 若 $\chi(\vec{q}_k(\cdot), \cdot) \in C^1([0, T])$ 、 $k = 1, \dots, K$, 则有

$$(\partial_t^{\circ, h} \chi)(\vec{z}, t) = \sum_{k=1}^K \left[\frac{d}{dt} \chi(\vec{q}_k(t), t) \right] \phi_k^{\Gamma^h(t)}(\vec{z}) \quad \forall (\vec{z}, t) \in \mathcal{G}_T^h,$$

即可以为 $\partial_t^{\circ,h} \chi$ 选取连续的表示, 从而 $\chi \in V_T(\mathcal{G}_T^h)$ 。

(iii) 有 $\vec{\mathcal{V}}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$, 且在 $\mathcal{G}_T^h$ 上有 $\vec{\mathcal{V}}^h = \partial_t^{\circ,h} \text{id}$ 。

(iv) 将 f 延拓至 $\mathcal{S}_{j,T}^h$ 的一个邻域, 其中 $j = 1, \dots, J$, 便有

$$\partial_t^{\circ,h} f = \partial_t f + \vec{\mathcal{V}}^h \cdot \nabla f \quad \text{在 } \mathcal{S}_{j,T}^h,$$

参见注记 29(ii)。

定理 70 设 $\mathcal{G}_T^h$ 为演化多面体超曲面, $\eta, \zeta \in V_T(\mathcal{G}_T^h)$ 。

(i) 有

$$\frac{d}{dt} \langle \eta, \zeta \rangle_{\Gamma^h(t)} = \left\langle \partial_t^{\circ,h} \eta, \zeta \right\rangle_{\Gamma^h(t)} + \left\langle \eta, \partial_t^{\circ,h} \zeta \right\rangle_{\Gamma^h(t)} + \left\langle \eta \zeta, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}.$$

(ii) 有

$$\frac{d}{dt} \langle \eta, \zeta \rangle_{\Gamma^h(t)}^h = \left\langle \partial_t^{\circ,h} \eta, \zeta \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \eta, \partial_t^{\circ,h} \zeta \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \eta \zeta, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h.$$

证明 (i) 对 $\Gamma^h(t)$ 的每个演化单形 $\sigma_j(t)$ 应用输运定理 (定理 32), 并利用假设 $\eta, \zeta \in V_T(\mathcal{G}_T^h)$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \eta, \zeta \rangle_{\Gamma^h(t)} &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^J \int_{\sigma_j(t)} \eta \zeta \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \sum_{j=1}^J \int_{\sigma_j(t)} \partial_t^{\circ,h} (\eta \zeta) + \eta \zeta \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \left\langle \partial_t^{\circ,h} \eta, \zeta \right\rangle_{\Gamma^h(t)} + \left\langle \eta, \partial_t^{\circ,h} \zeta \right\rangle_{\Gamma^h(t)} + \left\langle \eta \zeta, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}. \end{aligned}$$

(ii) 证明与 (i) 类似, 可参阅 Barrett et al. (2015e, 引理 3.1)。□

定理 71 设 $\mathcal{G}_T^h$ 为演化多面体超曲面, 对 $t \in [0, T]$, $\Gamma^h(t)$ 为区域 $\Omega^h(t) \subset \mathbb{R}^d$ 的边界。假设 $\vec{\nu}^h(t)$ 是 $\Omega^h(t)$ 在 $\Gamma^h(t)$ 上的外单位法向量, 且 $f \in C^1(\overline{\mathfrak{D}_T^h})$, 其中

$$\mathfrak{D}_T^h = \bigcup_{t \in [0, T]} (\Omega^h(t) \times \{t\}).$$

则有

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^h(t)} f \, d\mathcal{L}^d = \int_{\Omega^h(t)} \partial_t f \, d\mathcal{L}^d + \left\langle f, \vec{\mathcal{V}}^h \cdot \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}.$$

证明 采用 Lipschitz 区域散度定理的一个变体, 仿照 Eck et al. (2017, §7.3) 即可得

到结论。 $\square$

3.5 演化多面体曲面的其他结论

下面陈述引理 37 和引理 38 的离散对应。

引理 72 设 $\mathcal{G}_T^h$ 为演化多面体超曲面, 则有

$$\partial_t^{\circ,h} \vec{\nu}^h = -(\nabla_s \vec{\mathcal{V}}^h)^\top \vec{\nu}^h \quad \text{几乎处处处于 } \Gamma^h(t).$$

证明 与定理 70(i) 的证明类似, 对 $\Gamma^h(t)$ 的每个演化单形 $\sigma_j(t)$ 应用引理 37(i) 即可。 $\square$

引理 73 设 $\mathcal{G}_T^h$ 为演化多面体超曲面, 并设 $\eta \in V_T(\mathcal{G}_T^h)$ 、 $\vec{\eta} \in \underline{V}_T(\mathcal{G}_T^h)$ 。则有以下结论, 其中由定义 5(vii) 回顾: 在 $\Gamma^h(t)$ 上几乎处处有 $D_s(\vec{\mathcal{V}}^h) = \frac{1}{2} P_{\Gamma^h} (\nabla_s \vec{\mathcal{V}}^h + (\nabla_s \vec{\mathcal{V}}^h)^\top) P_{\Gamma^h}$ 。

(i)

$$\partial_t^{\circ,h} \nabla_s \eta - \nabla_s \partial_t^{\circ,h} \eta = [\nabla_s \vec{\mathcal{V}}^h - 2 D_s(\vec{\mathcal{V}}^h)] \nabla_s \eta \quad \text{几乎处处处于 } \Gamma^h(t).$$

(ii)

$$\partial_t^{\circ,h} \nabla_s \vec{\eta} - \nabla_s \partial_t^{\circ,h} \vec{\eta} = (\nabla_s \vec{\eta}) [\nabla_s \vec{\mathcal{V}}^h - 2 D_s(\vec{\mathcal{V}}^h)]^\top \quad \text{几乎处处处于 } \Gamma^h(t).$$

(iii)

$$\partial_t^{\circ,h} (\nabla_s \cdot \vec{\eta}) - \nabla_s \cdot (\partial_t^{\circ,h} \vec{\eta}) = [\nabla_s \vec{\mathcal{V}}^h - 2 D_s(\vec{\mathcal{V}}^h)] : \nabla_s \vec{\eta} \quad \text{几乎处处处于 } \Gamma^h(t).$$

证明 与定理 70(i) 的证明类似, 对 $\Gamma^h(t)$ 的每个演化单形 $\sigma_j(t)$ 应用引理 38 即可。 $\square$

第四章

平均曲率流

借助平均曲率流，最便于说明数值求解曲率驱动演化方程所需的基本思想。设 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一族演化闭超曲面， $d \geq 2$ ；在每一时刻，考虑其总面积 $|\Gamma(t)| = \mathcal{H}^{d-1}(\Gamma(t))$ 。本节只考虑闭曲面 $\Gamma(t)$ ，即紧致且无边界的曲面。由输运定理（定理 32）得

$$\frac{d}{dt} |\Gamma(t)| = - \langle \kappa, \nu \rangle_{\Gamma(t)}, \quad (36)$$

其中 κ 是 $\Gamma(t)$ 的平均曲率， ν 是其法向速度；回顾 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma(t)}$ 表示 $\Gamma(t)$ 上的 L^2 内积。这里用到了 $\Gamma(t)$ 无边界这一条件。由此可知，超曲面的几何演化律

$$\nu = \kappa \quad \text{在 } \Gamma(t) \quad (37)$$

使曲面面积以最速方式下降，故亦称为 $|\Gamma(t)|$ 的 L^2 梯度流；详见例如 Mantegazza (2011); Garcke (2013)。这是最基本的曲率驱动演化律，其解析理论和数值方法均已有深入研究；详见 Huisken (1984); Gage and Hamilton (1986); Giga (2006); Mantegazza (2011); Garcke (2013)、Deckelnick et al. (2005a) 及其中所引文献。

4.1 弱形式

本节以平均曲率流为例，介绍作者提出的超曲面曲率驱动演化律的逼近思想。这些思想给出稳定的逼近方法，并且通常能够使逼近演化曲面的网格保持良好的质量。后一性质至关重要：许多参数方法在演化过程中会出现网格退化，甚至导致相应算法无法继续运行。本节的思想也将成为后文处理更复杂演化律的基础。此外，我们还将本方法与文献中处理平均曲率流的其他方法作比较。

本方法以如下弱形式为基础。我们的目标是将演化律 $\mathcal{V} = \kappa$ 写成弱形式。为此，首先注意到，对于整体参数化 $\vec{x} : \Upsilon \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 及其对应的可定向超曲面 $\Gamma(t) = \vec{x}(\Upsilon, t)$ (回顾定义 25)，由注记 26(i) 及引理 13(ii)，演化律可写成

$$\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\nu} = \kappa, \quad \kappa \vec{\nu} = \Delta_s \vec{\text{id}} \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (38)$$

回顾注记 22(iv) 中第二个恒等式的弱形式，我们提出平均曲率流的如下弱形式。给定闭超曲面 $\Gamma(0)$ ，求具有整体参数化及其诱导速度场 $\vec{\mathcal{V}}$ 的演化超曲面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ ，以及 $\kappa \in L^2(\mathcal{G}_T)$ ，使之满足：对几乎所有 $t \in (0, T)$ ，求 $(\vec{\mathcal{V}}(\cdot, t), \kappa(\cdot, t)) \in [L^2(\Gamma(t))]^d \times L^2(\Gamma(t))$ 使得

$$\left\langle \vec{\mathcal{V}}, \chi \vec{\nu} \right\rangle_{\Gamma(t)} - \langle \kappa, \chi \rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \chi \in L^2(\Gamma(t)), \quad (39a)$$

$$\langle \kappa \vec{\nu}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \nabla_s \vec{\text{id}}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d. \quad (39b)$$

这里考虑的是闭曲面，故 (39b) 中没有边界项。采用 $\kappa \vec{\nu} = \Delta_s \vec{\text{id}}$ 的弱形式 (39b) 是 Dziuk (1991) 的核心思想；正是这一思想使得以分片光滑曲面逼近光滑曲面及其平均曲率成为可能。最后， $H^1(\Gamma(t))$ 表示通常的 Sobolev 空间，即 $\Gamma(t)$ 上平方可积且曲面梯度平方可积的函数所成的空间。曲面上的 Sobolev 空间可参阅 Wloka (1987, I§4)。

4.2 有限元逼近

给定初始多面体超曲面 Γ^0 ，我们要构造多面体超曲面 Γ^m ， $m = 1, \dots, M$ ，使之逼近平均曲率流的真实连续解 $\Gamma(t_m)$ 在各时刻 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ 的值。这些时刻构成时间区间 $[0, T]$ 的一个剖分，时间步长为

$$\Delta t_m = t_{m+1} - t_m, \quad m = 0, \dots, M-1. \quad (40)$$

源自 Dziuk (1991) 的一个思想, 是借助参数化 $\vec{X}^{m+1} : \Gamma^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ 将 Γ^{m+1} 参数化在 Γ^m 上。回顾定义 43 中的有限元空间与内积, 下面给出 Barrett et al. (2007b, 2008b) 中平均曲率流弱形式 (39) 的有限元逼近。

设闭多面体超曲面 Γ^0 是 $\Gamma(0)$ 的逼近。对 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 使得

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m}, \chi \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \langle \kappa^{m+1}, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (41a)$$

$$\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (41b)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 。

回顾定义 25(ii), Γ^m 上的 $\frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m}$ 是 $\Gamma(t_m)$ 上的 $\vec{\mathcal{V}}$ 的自然逼近。还应注意, 虽然原问题具有高度非线性, 方程组 (41) 却是线性的, 因而容易求解。这主要是因为弱形式中通过面积元、法向量及曲面梯度出现的几何量均作显式处理。

注记 74 (带边界的曲面) 回顾: 对于无边界的演化超曲面, (37) 是由 (36) 导出的 $|\Gamma(t)|$ 的 L^2 梯度流。若允许 $\partial\Gamma(t)$ 非空, 则须将 (36) 改为

$$\frac{d}{dt} |\Gamma(t)| = - \left\langle \kappa \vec{\nu}, \vec{\mathcal{V}} \right\rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \vec{\mathcal{V}}, \vec{\mu} \right\rangle_{\partial\Gamma(t)}, \quad (42)$$

其中 $\vec{\mathcal{V}}$ 是演化超曲面的整体参数化所诱导的速度场, $\vec{\mu}(t)$ 是 $\partial\Gamma(t)$ 上的外单位余法向量; 回顾定理 32。因此, 只要选取边界条件使 (42) 的最后一项消失, (37) 就仍是 $|\Gamma(t)|$ 的 L^2 梯度流。最简单的此类边界条件是固定

$$\partial\Gamma(t) = \partial\Gamma(0) \quad \forall t \in (0, T]. \quad (43)$$

逼近格式 (41) 很容易推广到这种情形: 将 (41b) 中的空间 $\underline{V}(\Gamma^m)$ 换成

$$\underline{V}_D(\Gamma^m) = \left\{ \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) : \vec{\eta} = \vec{0} \text{ 在 } \partial\Gamma^m \right\}, \quad (44)$$

并求满足 $\vec{X}^{m+1} - \text{id}|_{\Gamma^m} \in \underline{V}_D(\Gamma^m)$ 的 $\vec{X}^{m+1}$ 。更复杂的边界条件也可类似处理, 例如允许边界 $\partial\Gamma(t)$ 沿某个给定固定区域的边界移动, 同时规定接触角的情形。另一个相关例子是超曲面簇的演化, 其中若干曲面的边界须始终相互连接。通常所关心的是平面中的三重点以及 $\mathbb{R}^3$ 中的三重交线。本文的方法可自然地逼近这些情形, 既适用于平均曲率流, 也适用于更一般的几何演化方程。有兴趣的读者可参阅系列论文 Barrett et al. (2007a,b, 2008c, 2010a,d)。

注记 75 (实现) 方程组 (41) 的实现并不困难。当 $d = 2$ 时, 可导出等价的有限差分形

式, 见下文 §4.3.1。当 $d = 3$ 时, 格式 (41) 既可直接在 MATLAB 之类的高级计算环境中实现, 也可在支持 $\mathbb{R}^3$ 中二维超曲面上偏微分方程逼近的有限元工具包中实现。此类工具包包括 ALBERTA, Schmidt and Siebert (2005); Dune, Dedner et al. (2010); 以及 FELICITY, Walker (2018)。这些工具包的一个优点是, 格式的实现几乎与维数无关, 因而可以统一处理 $d = 2$ 和 $d = 3$ 两种情形。对于分片线性逼近 (41), 与 $\mathbb{R}^{d-1}$ 中平坦固定区域上的标准问题相比, 差别仅在于: 用于逼近偏微分方程的初始网格, 其顶点有 d 个坐标而非 $d - 1$ 个坐标, 并且每一时间步之后均须移动网格顶点。

初始网格可以从简单而粗的宏观三角剖分出发, 利用所选有限元工具包的功能加密并变换而得; 也可以使用较完备的三维体网格生成器, 提取所生成三维体网格的曲面网格。此类体网格生成器包括 Gmsh, Geuzaine and Remacle (2009); CGAL, Rineau and Yvinec (2019); TIGER, Walker (2013); Cleaver, CIBC (2016); 以及 NETGEN, Schöberl (1997)。

4.3 离散线性方程组

下面说明由 (41) 产生的线性方程组。引入矩阵 $\vec{N}_{\Gamma^m} \in (\mathbb{R}^d)^{K \times K}$ 、 $M_{\Gamma^m}, A_{\Gamma^m} \in \mathbb{R}^{K \times K}$ 及 $A_{\Gamma^m} \in (\mathbb{R}^{d \times d})^{K \times K}$, 其元素为

$$\begin{aligned} [M_{\Gamma^m}]_{kl} &= \left\langle \phi_k^{\Gamma^m}, \phi_l^{\Gamma^m} \right\rangle_{\Gamma^m}^h, \quad [\vec{N}_{\Gamma^m}]_{kl} = \int_{\Gamma^m} \pi_{\Gamma^m} \left[\phi_k^{\Gamma^m} \phi_l^{\Gamma^m} \right] \vec{\nu}^m d\mathcal{H}^{d-1}, \\ [A_{\Gamma^m}]_{kl} &= \left\langle \nabla_s \phi_k^{\Gamma^m}, \nabla_s \phi_l^{\Gamma^m} \right\rangle_{\Gamma^m} \end{aligned} \quad (45)$$

以及 $[A_{\Gamma^m}]_{kl} = [A_{\Gamma^m}]_{kl} \text{Id}$; 这里回顾定义 43(i)。这些矩阵的组装与 $\mathbb{R}^{d-1}$ 中区域上的有限元方法类似。除了计算单形的体积, 还须计算其法向量以及基函数的曲面梯度。后者可由下式计算:

$$\nabla_s \phi_k^{\Gamma^m} = \sum_{i=1}^{d-1} \left(\partial_{\vec{\tau}_i} \phi_k^{\Gamma^m} \right) \vec{\tau}_i,$$

其中 $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_{d-1}\}$ 是单形切空间的一组标准正交基, 回顾定义 5(ii)。于是, (41) 可表为: 求 $(\delta \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in (\mathbb{R}^d)^K \times \mathbb{R}^K$ 使得

$$\begin{pmatrix} \Delta t_m M_{\Gamma^m} & -\vec{N}_{\Gamma^m}^\top \\ \vec{N}_{\Gamma^m} & A_{\Gamma^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa^{m+1} \\ \delta \vec{X}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -A_{\Gamma^m} \vec{X}^m \end{pmatrix}, \quad (46)$$

这里略微混用记号, 以 $\delta \vec{X}^{m+1} = (\delta \vec{X}_1^{m+1}, \dots, \delta \vec{X}_K^{m+1})^\top$ 、 $\kappa^{m+1} = (\kappa_1^{m+1}, \dots, \kappa_K^{m+1})^\top$ 及 $\vec{X}^m = (\vec{X}_1^m, \dots, \vec{X}_K^m)^\top$ 分别表示相对于 $\vec{X}^{m+1} - \text{id}|_{\Gamma^m}$ 、 κ^{m+1} 及 $\text{id}|_{\Gamma^m}$ 的标准基的系数向量。下一节将证明, 在很弱的假设下, 上述方程组的矩阵可逆。因此, 可采用诸

如 UMFPACK 的稀疏直接求解方法有效地求解, 见 Davis (2004)。也可采用迭代方法: 先对 (46) 作 Schur 补消去 κ^{m+1} , 再采用 (预条件) 共轭梯度法; 详见例如 Barrett et al. (2008b)。事实上, Schur 补方法本质上归结为下面的方程组 (47), 现将其导出。

方程组 (41) 也可改写为只以 $\vec{X}^{m+1}$ 为未知量的方程。为此, 设 $\vec{\omega}^m \in \underline{V}(\Gamma^m)$ 是 Γ^m 的顶点法向量, 回顾定义 51。由 (19) 可知, 可由 (41a) 按下式计算 κ^{m+1} :

$$\kappa^{m+1} = \frac{1}{\Delta t_m} \pi_{\Gamma^m} \left[\left(\vec{X}^{m+1} - \text{id}_{|\Gamma^m} \right) \cdot \vec{\omega}^m \right],$$

回顾定义 43(i)。因而 (41) 可改写为: 求 $\vec{X}^{m+1} \in \underline{V}(\Gamma^m)$ 使得

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m} \cdot \vec{\omega}^m, \vec{\eta} \cdot \vec{\omega}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m). \quad (47)$$

4.3.1 平面曲线 在闭曲线情形, 方程组 (41) 尤为简单。回顾定义 53, 可将其改写如下。

设 $\vec{X}^0 \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ 使得 $\Gamma^0 = \vec{X}^0(\mathbb{I})$ 是 $\Gamma(0)$ 的多边形逼近。对 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}^h(\mathbb{I}) \times V^h(\mathbb{I})$ 使得

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m}{\Delta t_m}, \chi \vec{\nu}^m \circ \vec{X}^m |\vec{X}_\rho^m| \right\rangle_{\mathbb{I}}^h - \left\langle \kappa^{m+1}, \chi |\vec{X}_\rho^m| \right\rangle_{\mathbb{I}}^h = 0 \quad \forall \chi \in V^h(\mathbb{I}), \quad (48a)$$

$$\left\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m \circ \vec{X}^m, \vec{\eta} |\vec{X}_\rho^m| \right\rangle_{\mathbb{I}}^h + \left\langle \vec{X}_\rho^{m+1}, \vec{\eta}_\rho |\vec{X}_\rho^m|^{-1} \right\rangle_{\mathbb{I}} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}^h(\mathbb{I}) \quad (48b)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\mathbb{I})$ 。

将 (48) 改写成有限差分格式是直接的。设 κ_j^{m+1} 、 $\vec{X}_j^{m+1}$ 、 $\vec{X}_j^m$ 及 $\vec{\omega}_j^m$ 分别是 κ^{m+1} 、 $\vec{X}^{m+1}$ 、 $\vec{X}^m$ 及 $\vec{\omega}^m \circ \vec{X}^m$ 在节点 q_j 处的值, $j = 0, \dots, J+1$ 。令 $\vec{h}_j^m = \vec{X}_j^m - \vec{X}_{j-1}^m$, $j = 1, \dots, J+1$ 。回顾 (22), 得到加权顶点法向量

$$\vec{\omega}_j^m = - \frac{\left(\vec{X}_{j+1}^m - \vec{X}_{j-1}^m \right)^\perp}{|\vec{h}_j^m| + |\vec{h}_{j+1}^m|} \quad j = 1, \dots, J. \quad (49)$$

因此, 方程 (48a) 可改写为如下有限差分形式:

$$\frac{1}{\Delta t_m} \left(\vec{X}_j^{m+1} - \vec{X}_j^m \right) \cdot \vec{\omega}_j^m = \kappa_j^{m+1}, \quad j = 1, \dots, J. \quad (50a)$$

以标准基函数检验 (48b), 得到有限差分型方程

$$\kappa_j^{m+1} \bar{\omega}_j^m = \frac{2}{|\bar{h}_j^m| + |\bar{h}_{j+1}^m|} \left(\frac{\bar{X}_{j+1}^{m+1} - \bar{X}_j^{m+1}}{|\bar{h}_{j+1}^m|} - \frac{\bar{X}_j^{m+1} - \bar{X}_{j-1}^{m+1}}{|\bar{h}_j^m|} \right) \quad j = 1, \dots, J. \quad (50b)$$

当然, 也可以利用 (50a) 将 (50b) 化为关于 $\bar{X}^{m+1}$ 的节点值的方程, 从而得到 (47) 的有限差分对应形式。

4.4 存在唯一性

为证明 (41) 的解的存在唯一性, 先回顾假设 64。

定理 76 设 Γ^m 满足假设 64(i)。则方程组 (41) 存在唯一解 $(\bar{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 。

证明 与引理 66 的证明类似, 由唯一性即可推出存在性。因此, 考虑关于未知量 $(\bar{X}, \kappa) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 的齐次方程组

$$\left\langle \bar{X}, \chi \bar{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \Delta t_m \langle \kappa, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (51a)$$

$$\langle \kappa \bar{\nu}^m, \bar{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \bar{X}, \nabla_s \bar{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \bar{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m), \quad (51b)$$

在 (51a) 中取 $\chi = \kappa \in V(\Gamma^m)$, 在 (51b) 中取 $\bar{\eta} = \bar{X} \in \underline{V}(\Gamma^m)$, 得到

$$\left| \nabla_s \bar{X} \right|_{\Gamma^m}^2 + \Delta t_m \left(|\kappa|_{\Gamma^m}^h \right)^2 = 0, \quad (52)$$

这里用到了 (16)。由 (52) 可知 $\kappa = 0$, 并且存在常向量 $\bar{X}^c \in \mathbb{R}^d$, 使得在 Γ^m 上有 $\bar{X} = \bar{X}^c$ 。结合 (51a) 并回顾 (20), 得到

$$\left\langle \bar{X}^c, \chi \bar{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m). \quad (53)$$

与引理 66 的证明相同, 由 (53) 及假设 64(i) 可得 $\bar{X}^c = \vec{0}$ 。这就证明了 (41) 存在唯一解 $(\bar{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 。□

4.5 稳定性

当 $d = 2$ 及 $d = 3$ 时, 可以证明格式 (41) 无条件稳定。

定理 77 设 $d = 2$ 或 $d = 3$ 。设 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 是 (41) 的一个解。则

$$|\Gamma^{m+1}| + \Delta t_m \left(|\kappa^{m+1}|_{\Gamma^m}^h \right)^2 \leq |\Gamma^m| .$$

证明 在 (41a) 中取 $\chi = \kappa^{m+1} \in V(\Gamma^m)$, 在 (41b) 中取 $\vec{\eta} = \frac{1}{\Delta t_m} (\vec{X}^{m+1} - \text{id}_{|\Gamma^m}) \in \underline{V}(\Gamma^m)$, 得到

$$\left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s (\vec{X}^{m+1} - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma^m} + \Delta t_m \left(|\kappa^{m+1}|_{\Gamma^m}^h \right)^2 = 0 . \quad (54)$$

此外, 由引理 57 得

$$\left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s (\vec{X}^{m+1} - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma^m} \geq |\Gamma^{m+1}| - |\Gamma^m| . \quad (55)$$

结合 (54) 与 (55) 即得所证。 $\square$

注记 78 显然, 若 $\{(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1})\}_{m=0}^{M-1}$ 表示 $m = 0, \dots, M-1$ 时 (41) 的解, 则上述定理立即给出能量界

$$|\Gamma^k| + \sum_{m=0}^{k-1} \Delta t_m \left(|\kappa^{m+1}|_{\Gamma^m}^h \right)^2 \leq |\Gamma^0| .$$

其中 $k = 1, \dots, M$ 。

4.6 均分性质

许多以多面体曲面逼近演化超曲面的数值方法, 都有网格在演化过程中变得很不均匀的问题。例如, 网格点可能彼此靠得过近, 或某些网格角度变得过小或过大。这会使计算极不稳定且不准确。此外, 每个时间层需要求解的线性方程组, 其条件数也会变得很大; 有时计算经过一段时间后甚至无法继续。本节迄今所述方法的一个重要性质, 是网格通常表现良好。下面以最简单的平均曲率流为例说明这一点。不过, 对于本文其余章节中更复杂流的推广格式, 也有类似结论。

借助格式 (41) 的半离散版本, 最便于说明网格的行为; 这里回顾定义 68。给定闭多面体超曲面 $\Gamma^h(0)$, 求具有诱导速度 $\vec{\mathcal{V}}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$ 的演化多面体超曲面 $\mathcal{G}_T^h$, 以及

$\kappa^h \in V(\mathcal{G}_T^h)$, 即对所有 $t \in [0, T]$ 有 $\vec{\mathcal{V}}^h(\cdot, t) \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 及 $\kappa^h(\cdot, t) \in V(\Gamma^h(t))$, 使得对所有 $t \in (0, T]$,

$$\left\langle \vec{\mathcal{V}}^h, \chi \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h - \left\langle \kappa^h, \chi \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^h(t)), \quad (56a)$$

$$\left\langle \kappa^h \vec{\mathcal{V}}^h, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)). \quad (56b)$$

我们可以证明格式 (56) 稳定, 即定理 77 的半离散对应结论成立; 还可以证明, 其切向运动保证每个解均满足定义 60 中的性质。

定理 79 设 $(\mathcal{G}_T^h, \kappa^h)$ 是 (56) 的一个解。

(i) 有

$$\frac{d}{dt} |\Gamma^h(t)| + \left(|\kappa^h|_{\Gamma^h(t)}^h \right)^2 = 0.$$

(ii) 对任意 $t \in (0, T]$, $\Gamma^h(t)$ 是共形多面体曲面。特别地, 当 $d = 2$ 时, 曲线 $\Gamma^h(t)$ 的任意两个相邻单元或者等长, 或者平行。

证明 (i) 在 (56a) 中取 $\chi = \kappa^h(\cdot, t) \in V(\Gamma^h(t))$, 在 (56b) 中取 $\vec{\eta} = \vec{\mathcal{V}}^h(\cdot, t) \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$, 由定理 70 及引理 9(ii) 得

$$\frac{d}{dt} |\Gamma^h(t)| = \left\langle 1, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = - \left\langle \kappa^h, \kappa^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h,$$

即所证。

(ii) 直接由定义 60 及定理 62 得到。 $\square$

注记 80 一般而言, 尚不清楚 (56) 的解是否存在。例如, 当 $d \geq 3$ 时, 由 $\Gamma^h(0)$ 固定的三角剖分的拓扑结构可能使得同时满足 (56a) 和 (56b) 的解不存在。在这些情形中, 即使时间步长 Δt_m 很小, 全离散格式 (41) 也可能出现网格缺陷; 对于满足定义 60 的曲面, 本来不应出现这些缺陷, 回顾注记 61。最近, Elliott and Fritz (2017, 图 27) 给出了此类缺陷的一个例子。

对于曲线, 即 $d = 2$ 的情形, 格式 (56) 很容易解释为一个微分代数方程组。为此, 对 $\vec{X}^h(t) \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ 采用 §4.3.1 中的记号, 并置 $\vec{h}_j(t) = \vec{X}_j^h(t) - \vec{X}_{j-1}^h(t)$, $j = 1, \dots, J+1$ 。于是得到顶点法向量 $\vec{\omega}_j^h(t)$ 所满足的 (49) 的自然对应式; 类似于 (50), 方程组 (56) 可写成如下微分代数方程组 (DAE)。给定 $\vec{X}^h(0) \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$, 对 $t \in (0, T]$ 求 $\vec{X}^h(t) \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ 及 $\kappa^h(t) \in V^h(\mathbb{I})$, 使得

$$- \left(\frac{d}{dt} \vec{X}_j^h \right) \cdot \left(\frac{\left(\vec{X}_{j+1}^h - \vec{X}_{j-1}^h \right)^\perp}{|\vec{h}_j| + |\vec{h}_{j+1}|} \right) = \kappa_j^h, \quad (57a)$$

$$-\kappa_j^h \frac{(\vec{X}_{j+1}^h - \vec{X}_{j-1}^h)^\perp}{|\vec{h}_j| + |\vec{h}_{j+1}|} = \frac{2}{|\vec{h}_j| + |\vec{h}_{j+1}|} \left(\frac{\vec{X}_{j+1}^h - \vec{X}_j^h}{|\vec{h}_{j+1}|} - \frac{\vec{X}_j^h - \vec{X}_{j-1}^h}{|\vec{h}_j|} \right), \quad (57b)$$

其中 $j = 1, \dots, J$ 。

注记 81 方程 (57a) 只规定 $\frac{d}{dt} \vec{X}_j^h$ 的一个方向分量, 另一方向分量的演化则由 (57b) 中的代数条件确定。因此, 整个方程组是一个具有高度非线性且退化的微分代数方程组。当顶点合并时, 其定义方程会变得奇异。不过, 定理 79(ii) 表明, 在曲线不为直线段的区域中不会出现这种情形。

迄今所讨论的线性全离散格式 (41), 是对 (56) 的一种时间离散。全离散格式 (41) 不继承定理 79(ii) 的共形性质, 但 (41) 的解仍呈现出使顶点分布良好的切向运动。现在讨论 (56) 的全隐式时间离散, 其解在每一时间步均为共形多面体曲面。这些思想最早在 Barrett et al. (2011) 中针对曲线提出。

设闭多面体超曲面 Γ^0 是 $\Gamma(0)$ 的逼近。对 $m = 0, \dots, M-1$, 求多面体超曲面 Γ^{m+1} 及满足 $\Gamma^m = \vec{X}^m(\Gamma^{m+1})$ 的 $(\vec{X}^m, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^{m+1}) \times V(\Gamma^{m+1})$, 使得

$$\left\langle \frac{\text{id} - \vec{X}^m}{\Delta t_m}, \chi \vec{\nu}^{m+1} \right\rangle_{\Gamma^{m+1}}^h - \langle \kappa^{m+1}, \chi \rangle_{\Gamma^{m+1}}^h = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^{m+1}), \quad (58a)$$

$$\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^{m+1}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^{m+1}}^h + \langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^{m+1}} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^{m+1}). \quad (58b)$$

定理 82 设 Γ^{m+1} 及 $(\vec{X}^m, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^{m+1}) \times V(\Gamma^{m+1})$ 是 (58) 的一个解。

(i) 则 Γ^{m+1} 是共形多面体曲面。特别地, 当 $d = 2$ 时, 曲线 Γ^{m+1} 的任意两个相邻单元或者等长, 或者平行。

(ii) 当 $d = 2$ 时, 有

$$|\Gamma^{m+1}| + \Delta t_m \left(|\kappa^{m+1}|_{\Gamma^{m+1}}^h \right)^2 \leq |\Gamma^m|. \quad (59)$$

证明 (i) 直接由定义 60 及定理 62 得到。

(ii) 在 (58a) 中取 $\chi = \kappa^{m+1} \in V(\Gamma^{m+1})$, 在 (58b) 中取 $\vec{\eta} = \frac{1}{\Delta t_m} (\text{id}|_{\Gamma^{m+1}} - \vec{X}^m) \in \underline{V}(\Gamma^{m+1})$, 得到

$$\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s (\text{id} - \vec{X}^m) \rangle_{\Gamma^{m+1}} + \Delta t_m \left(|\kappa^{m+1}|_{\Gamma^{m+1}}^h \right)^2 = 0. \quad (60)$$

此外, 由引理 58 得

$$\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s (\text{id} - \vec{X}^m) \rangle_{\Gamma^{m+1}} \geq |\Gamma^{m+1}| - |\Gamma^m|. \quad (61)$$

结合 (60) 与 (61) 即得所证。 $\square$

注记 83 与注记 80 类似, 一般而言, 尚不清楚 (58) 的解是否存在. 不过, 当 $d = 2$ 时, 通常看来存在解; 对 (58) 作下面所述的少许修改, 还可得到一个具有等分布性质的无条件稳定格式.

对于曲线情形 $d = 2$, 作者在 Barrett et al. (2011) 中以 (58) 为基础, 提出了 $\mathcal{V} = \varkappa$ 的全离散参数有限元离散. 这些格式无条件稳定, 并且在每一时间层内在地使顶点等分布. 采用 §4.3.1 中的记号 (另见注记 54), 可将曲线情形的 (58) 改写如下.

设 $\vec{X}^0 \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ 使得 $\Gamma^0 = \vec{X}^0(\mathbb{I})$ 是 $\Gamma(0)$ 的多边形逼近. 对 $m = 0, \dots, M-1$, 求满足 $\vec{X}^{m+1} \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ 的 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\mathbb{I})$ 及 $\kappa^{m+1} \in V^h(\mathbb{I})$, 使得对所有 $\chi \in V^h(\mathbb{I})$, $\vec{\eta} \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$,

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m}{\Delta t_m}, \chi \left(\vec{X}_\rho^{m+1} \right)^\perp \right\rangle_{\mathbb{I}}^h + \left\langle \kappa^{m+1}, \chi \left| \vec{X}_\rho^{m+1} \right| \right\rangle_{\mathbb{I}}^h = 0, \quad (62a)$$

$$\left\langle \kappa^{m+1} \left(\vec{X}_\rho^{m+1} \right)^\perp, \vec{\eta} \right\rangle_{\mathbb{I}}^h - \left\langle \vec{X}_\rho^{m+1}, \vec{\eta}_\rho \left| \vec{X}_\rho^{m+1} \right|^{-1} \right\rangle_{\mathbb{I}} = 0. \quad (62b)$$

回顾定理 82, (62) 的解具有等分布性质, 至少在曲线 Γ^{m+1} 的单元局部不平行的地方如此. 考虑 (62) 的如下修改, 可将这一结论加强为完全等分布. 对 $m = 0, \dots, M-1$, 求满足 $\vec{X}^{m+1} \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ 的 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\mathbb{I})$ 及 $\kappa^{m+1} \in V^h(\mathbb{I})$, 使得对所有 $\chi \in V^h(\mathbb{I})$, $\vec{\eta} \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$,

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m}{\Delta t_m}, \chi \left(\vec{X}_\rho^{m+1} \right)^\perp \right\rangle_{\mathbb{I}}^h + |\Gamma^{m+1}| \left\langle \kappa^{m+1}, \chi \right\rangle_{\mathbb{I}}^h = 0, \quad (63a)$$

$$\left\langle \kappa^{m+1} \left(\vec{X}_\rho^{m+1} \right)^\perp, \vec{\eta} \right\rangle_{\mathbb{I}}^h - |\Gamma^{m+1}|^{-1} \left\langle \vec{X}_\rho^{m+1}, \vec{\eta}_\rho \right\rangle_{\mathbb{I}} = 0. \quad (63b)$$

定理 84 设 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}^h(\mathbb{I}) \times V^h(\mathbb{I})$ 是 (63) 的一个解. 则

$$\left| \vec{X}_\rho^{m+1} \right| = |\Gamma^{m+1}| \quad \text{于 } I_j, \quad j = 1, \dots, J. \quad (64)$$

此外, $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1})$ 满足 (62), 并且满足稳定性估计

$$|\Gamma^{m+1}| + \Delta t_m |\Gamma^{m+1}| \left\langle \kappa^{m+1}, \kappa^{m+1} \right\rangle_{\mathbb{I}}^h \leq |\Gamma^m|. \quad (65)$$

证明 若 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}^h(\mathbb{I}) \times V^h(\mathbb{I})$ 是 (63) 的一个解, 则采用注记 54(iv) 中的记号, 类似于定理 62 的证明, 固定 $j \in \{1, \dots, J\}$, 并在 (58b) 中取 $\vec{\eta} \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$, 其中对 $i = 1, \dots, J$ 有

$$\vec{\eta}(q_i) = \delta_{ij} \left(\vec{X}^{m+1}(q_{j+1}) - \vec{X}^{m+1}(q_{j-1}) \right) = \delta_{ij} \left(\vec{h}_j^{m+1} + \vec{h}_{j+1}^{m+1} \right),$$

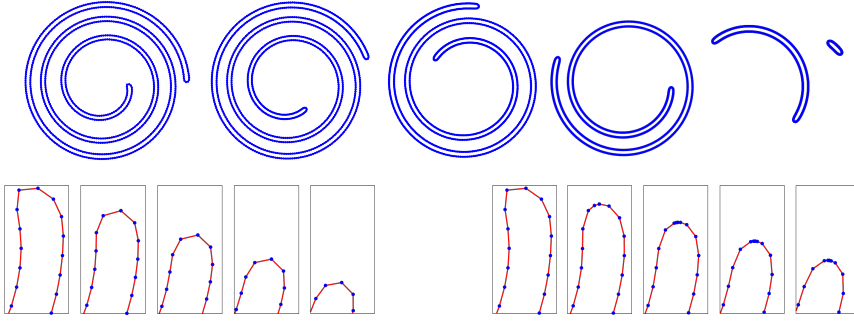


图 2: 螺旋曲线的平均曲率流。采用格式 (41), 取 $J = 1024$ 及 $\Delta t_m = \Delta t = 10^{-7}$, $m = 0, \dots, M-1$ 得到的数值解。图中显示时刻 $t = 0, 0.001, 0.005, 0.01, 0.02$ 的离散解。下方给出格式 (41) 在内侧尖端附近的顶点分布细节 (左), 并与经典 Dziuk 格式 (68) 比较 (右)。后一格式中顶点的合并导致模拟失效, 无法继续。

得到

$$0 = \left(\vec{h}_{j+1}^{m+1} - \vec{h}_j^{m+1} \right) \cdot \left(\vec{h}_{j+1}^{m+1} + \vec{h}_j^{m+1} \right) = \left| \vec{h}_{j+1}^{m+1} \right|^2 - \left| \vec{h}_j^{m+1} \right|^2. \quad (66)$$

由于 (66) 对 $j = 1, \dots, J$ 成立, 遂得 (64)。由 (64) 可知, $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}^h(\mathbb{I}) \times V^h(\mathbb{I})$ 也满足 (62), 且 $(\vec{X}^m \circ (\vec{X}^{m+1})^{-1}, \kappa^{m+1} \circ (\vec{X}^{m+1})^{-1}) \in \underline{V}(\Gamma^{m+1}) \times V(\Gamma^{m+1})$ 是 (58) 的一个解, 并满足稳定性界 (59)。因而得到 (65)。□

笔记 85

- (i) 显然, (64) 意味着 (63) 的每个解都完全等分布。
- (ii) 方程组 (63) 是非线性的, 可用 Newton 方法或如下迭代求解。给定满足 $\vec{X}^{m+1,0} \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ 的 $\Gamma^{m+1,0} = \vec{X}^{m+1,0}(\mathbb{I})$, 对 $i \geq 0$ 求解 $(\vec{X}^{m+1,i+1}, \kappa^{m+1,i+1}) \in \underline{V}^h(\mathbb{I}) \times V^h(\mathbb{I})$, 使得对所有 $\chi \in V^h(\mathbb{I})$ 、 $\vec{\eta} \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\vec{X}^{m+1,i+1} - \vec{X}^m}{\Delta t_m}, \chi \left(\vec{X}_\rho^{m+1,i} \right)^\perp \right\rangle_{\mathbb{I}}^h + |\Gamma^{m+i,i}| \langle \kappa^{m+1,i+1}, \chi \rangle_{\mathbb{I}}^h &= 0, \\ \left\langle \kappa^{m+1,i+1} \left(\vec{X}_\rho^{m+1,i} \right)^\perp, \vec{\eta} \right\rangle_{\mathbb{I}}^h - |\Gamma^{m+1,i}|^{-1} \langle \vec{X}_\rho^{m+1,i+1}, \vec{\eta}_\rho \rangle &= 0, \end{aligned}$$

译注: 上式第一行中底本的 $|\Gamma^{m+i,i}|$ 应理解为 $|\Gamma^{m+1,i}|$, 与本段的迭代记号一致。并置 $\Gamma^{m+1,i+1} = \vec{X}^{m+1,i+1}(\mathbb{I})$ 。该方程组存在唯一解, 可采用与 §4.3 所述类似的方法求解。详见 Barrett et al. (2011)。

作为例子, 图 2 展示了用格式 (41) 计算的曲线缩短流, 即 $d = 2$ 情形的平均曲率流。

4.7 其他参数方法

前面的讨论着重于作者的工作。现在讨论用于平均曲率流数值逼近的其他方法，重点仍是参数有限元方法。

4.7.1 经典 Dziuk 方法 Dziuk (1991) 提出的方法以

$$\vec{\mathcal{V}} = \vec{\varkappa}, \quad \vec{\varkappa} = \Delta_s \vec{\text{id}} \quad \text{在 } \Gamma(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{V}} = \Delta_s \vec{\text{id}} \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (67)$$

的弱形式为基础，而非 (38) 的弱形式。由于 $\Delta_s \vec{\text{id}} = \vec{\varkappa} = \varkappa \vec{\nu}$ 与法向量共线（回顾引理 13(ii)），演化曲面的运动方向始终与法向量共线。采用 §4.2 中的记号，所求解的方程组为：给定闭多面体超曲面 Γ^m ，求 $\vec{X}^{m+1} \in \underline{V}(\Gamma^m)$ 使得

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \vec{\text{id}}}{\Delta t_m}, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m). \quad (68)$$

该全离散线性方程组的存在性、唯一性及稳定性，可与 §4.4 和 §4.5 中的结论类似地证明。对于 $d = 2$ 的情形，Dziuk (1994) 在假设被逼近的解足够光滑的条件下，证明了 (68) 的采用质量集中的时间连续半离散变体的误差估计。尽管在 $d = 3$ 情形，尚未证明 (68) 或 (41) 的收敛性，但实际计算表明，两种逼近似乎均收敛；见例如 Barrett et al. (2008b, 表 1)。

4.7.2 Kovács、Li、Lubich 的收敛有限元算法 最近，Kovács et al. (2019) 首次证明了 $d = 3$ 情形平均曲率流数值方法的收敛性。在同样假设被逼近的解足够光滑的条件下，他们证明了平均曲率流半离散及全离散的误差估计。所用方程组为

$$\vec{\mathcal{V}} = \varkappa \vec{\nu}, \quad \partial_t^\circ \vec{\nu} = \Delta_s \vec{\nu} + |\nabla_s \vec{\nu}|^2 \vec{\nu}, \quad \partial_t^\circ \varkappa = \Delta_s \varkappa + |\nabla_s \vec{\nu}|^2 \varkappa \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

最后两个方程可由基本的几何分析和演化律 $\vec{\mathcal{V}} = \varkappa \vec{\nu}$ 导出；见引理 37(i)、引理 16、引理 7(iii)、引理 12(i) 及引理 39(i)。与 (41) 相比，该方法的不足在于：与经典 Dziuk 方法类似，其逼近的流沿法向运动，故网格仍可能恶化；此外还须求解一个额外的方程组。当然，该方法有一个明显优点，即它是目前唯一能在 $d = 3$ 情形证明收敛性的方法。

4.7.3 具有等分布性质的其他数值方法 对于平面曲线的平均曲率流，格式 (63) 在每一时间步均使曲线多边形逼近的顶点等分布。本节讨论一些达到相同目的的其他数值方法。

如前所述，我们希望控制网格点的切向分布，以避免顶点合并或燕尾等数值奇异性，后者即数值误差引起的自交。实际计算中，许多作者采用网格光滑方法，见例如 Sethian (1985); Dziuk et al. (2002); Bänsch et al. (2005)。不过，网格光滑也有不利之处：它可能过度光滑解，而且原逼近格式所具有的稳定性结论一般不再成立。对于具有某些守恒性质的几何演化律，例如所围面积守恒的流，必须格外谨慎，以确保网格光滑之后仍保持这些守恒性质。

对于演化曲线 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ ，考虑参数化 $\vec{x}: \mathbb{I} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，其中 $\mathbb{I} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是周期区间 $[0, 1]$ ，使得 $\Gamma(t) = \vec{x}(\mathbb{I}, t)$ 、 $t \in [0, T]$ 是曲率流方程 $\mathcal{V} = \varkappa$ 的解。以 s 表示 $\Gamma(t)$ 的弧长，则单位切向量为 $\vec{x}_s(\rho, t) = \frac{\vec{x}_\rho(\rho, t)}{|\vec{x}_\rho(\rho, t)|}$ ， $\rho \in \mathbb{I}$ ，而 $\Gamma(t)$ 上的一个可选法向量为 $\vec{\nu} \circ \vec{x} = -\vec{x}_s^\perp$ 。基本思想是只考虑满足

$$|\vec{x}_\rho(\rho, t)| = |\Gamma(t)| \quad \forall \rho \in \mathbb{I}, t \in [0, T], \quad (69)$$

的参数化；这意味着 ρ 与弧长仅差一个常数因子。此类方法最早由 Kessler et al. (1984) 提出，Strain (1989); Hou et al. (1994); Mikula and Ševčovič (2001) 对其作了分析和修改。也可将位置向量 $\vec{x}$ 的演化律按如下形式离散：

$$\partial_t \vec{x} = (\mathcal{V} \vec{\nu}) \circ \vec{x} + \alpha \vec{x}_s \quad \text{于 } \mathbb{I}, \quad (70)$$

其中切向速度的选取使得 $\Gamma(t)$ 的多边形逼近的顶点保持近似等分布。Kimura (1994) 使用了这一思想；Mikula and Ševčovič (2001) 证明，若初始时刻满足 (69)，则选取 α 使得

$$\alpha_s = (\mathcal{V} \varkappa) \circ \vec{x} - \frac{1}{|\Gamma(t)|} \langle \mathcal{V}, \varkappa \rangle_{\Gamma(t)},$$

便可保持性质 (69)。Deckelnick and Dziuk (1995) 也采用 (70)，并取

$$\alpha = \frac{\vec{x}_{\rho\rho} \cdot \vec{x}_\rho}{|\vec{x}_\rho|^3} \quad \text{于 } \mathbb{I}, \quad (71)$$

在实际计算中观察到多边形网格分布良好。此外，可以对其时间连续的半离散有限元逼近作误差分析。所得全离散格式尤其简单，可表为：给定 $\vec{X}^m \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ ，求 $\vec{X}^{m+1} \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ 使得

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m}{\Delta t_m}, \vec{\eta} |\vec{X}_\rho^m|^2 \right\rangle_{\mathbb{I}} + \left\langle \vec{X}_\rho^{m+1}, \vec{\eta}_\rho \right\rangle_{\mathbb{I}} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}^h(\mathbb{I}), \quad (72)$$

注意, Deckelnick and Dziuk (1995) 中的数值计算对 (72) 的第一项采用质量集中。另一方面, Pan and Wetton (2008); Pan (2008) 的作者求解 $\mathcal{V} = \varkappa$, 并附加约束

$$\vec{x}_\rho(\rho, t) \cdot \vec{x}_{\rho\rho}(\rho, t) = 0 \quad \forall \rho \in \mathbb{I}, t \in [0, T],$$

这使得 $(\frac{1}{2}|\vec{x}_\rho|^2)_\rho = \vec{x}_\rho \cdot \vec{x}_{\rho\rho} = 0$, 因而得到等分布的参数化。不过, 这一方法导致具有很强非线性的全离散问题。

4.7.4 利用 DeTurck 技巧获得良好的网格性质 作为抛物型方程, 平均曲率流 $\mathcal{V} = \varkappa$ 具有某些退化性, 其根源在于: 对一个解作重新参数化, 又得到另一个解。DeTurck (1983) 提出的思想, 是利用调和映射热流的解重新参数化曲率流的演化, 使重新参数化后的方程成为强抛物型。Elliott and Fritz (2017) 利用 DeTurck 技巧数值求解平均曲率流。所得算法有一个显著性质: 只要初始曲面的三角剖分具有良好的网格质量, 网格在演化中就会保持良好。粗略而言, 其原因是在适当假设下, 调和映射是共形映射, 从而保持角度。

在 $d = 3$ 情形, Elliott and Fritz (2017) 的算法有时能得到比 §4.2 中方法更好的网格。不过, 其待求解的方程组更复杂, 方法的灵活性似乎也较低, 例如在处理各向异性、三重点或三重交线, 以及界面演化与其他场的耦合时。关于此方法的更多细节, 以及 $d = 2$ 情形时间连续半离散变体的误差分析, 参阅 Elliott and Fritz (2017)。该误差分析推广了 Deckelnick and Dziuk (1995) 对采用特定切向速度 (71) 的变体所作的分析。Barrett et al. (2017a) 又将 Elliott and Fritz (2017) 的误差分析推广到了全离散情形。

4.7.5 其他数值方法 在某些情形, 所计算的曲面可以表示为函数的图像。Dziuk (1999b) 及 Deckelnick and Dziuk (1999) 对这种情形的有限元逼近作了分析。对于沿平均曲率流运动的轴对称曲面, Mayer and Simonett (2002); Barrett et al. (2019a) 给出了相应数值格式。还应提到 Mikula et al. (2014), 其中提出了演化曲面上点的切向重分布方法。这些方法以体积或长度为依据进行切向重分布, 可应用于任意维数的流形。水平集方法和相场方法则是完全不同的途径; 其讨论可见例如 *Handbook of Numerical Analysis* 第 XXI、XXII 卷

第五章

表面扩散及其他流

本节将第 4 节的思想推广到 $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) 中演化超曲面的更一般的演化律。

5.1 表面扩散流的性质

过去二十年间，超曲面的四阶几何演化方程发挥了重要作用。一个基本而形式十分简洁的例子，是表面扩散所驱动的运动

$$\mathcal{V} = -\Delta_s \mathcal{K} \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

这一流由 Mullins (1957) 引入，用于描述合金中界面上的扩散。它具有一个显著性质：对于闭曲面，曲面面积下降，而所围体积保持不变。这两项性质可由输运定理如下推出。设 $\Omega(t)$ 是闭超曲面 $\Gamma(t)$ 所围的区域， $\vec{\nu}(t)$ 表示 $\Omega(t)$ 在 $\Gamma(t)$ 上的外单位法向量，则由定理 33 得

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^d(\Omega(t)) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} 1 \, d\mathcal{L}^d = \langle 1, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} = -\langle 1, \Delta_s \mathcal{K} \rangle_{\Gamma(t)} = 0, \quad (73)$$

最后一个等式由流形上的散度定理得到，回顾注记 22(i)。此外，对于总面积 $|\Gamma(t)|$ ，由定理 32 得

$$\frac{d}{dt} |\Gamma(t)| = -\langle \mathcal{K}, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} = \langle \mathcal{K}, \Delta_s \mathcal{K} \rangle_{\Gamma(t)} = -|\nabla_s \mathcal{K}|_{\Gamma(t)}^2 \leq 0, \quad (74)$$

最后一个等式仍用到了注记 22(i)。事实上, 性质 (73) 和 (74) 与如下事实密切相关: 在数学上, 表面扩散可解释为 $|\Gamma(t)|$ 的 H^{-1} 梯度流, 见例如 Taylor and Cahn (1994)。

利用如下形式

$$\vec{\nu} \cdot \vec{\nu} = -\Delta_s \kappa, \quad \kappa \vec{\nu} = \Delta_s \vec{\text{id}} \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (75)$$

即可建立有限元逼近。

5.2 表面扩散的有限元逼近

采用与 §4.2 相同的记号, 回顾 Barrett et al. (2007a, 2008b) 中表面扩散方程 (75) 的如下有限元逼近。设闭多面体超曲面 Γ^0 是 $\Gamma(0)$ 的逼近。对 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 使得

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \vec{\text{id}}}{\Delta t_m}, \chi \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \langle \nabla_s \kappa^{m+1}, \nabla_s \chi \rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (76a)$$

$$\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h + \langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (76b)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 。该格式的离散解的存在唯一性, 可用与 §4.2 相同的方法证明。

定理 86 设 Γ^m 满足假设 64(i)。则方程组 (76) 存在唯一解 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 。

证明 证明与定理 76 的证明十分相似。对于齐次方程组

$$\left\langle \vec{X}, \chi \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \Delta t_m \langle \nabla_s \kappa, \nabla_s \chi \rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (77a)$$

$$\langle \kappa \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h + \langle \nabla_s \vec{X}, \nabla_s \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (77b)$$

的解 $(\vec{X}, \kappa) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$, 先证明 $\kappa = 0$, 再按照引理 66 的证明进行。在 (77a) 中取 $\chi = \kappa \in V(\Gamma^m)$, 在 (77b) 中取 $\vec{\eta} = \vec{X} \in \underline{V}(\Gamma^m)$, 得到

$$\left| \nabla_s \vec{X} \right|_{\Gamma^m}^2 + \Delta t_m \left| \nabla_s \kappa \right|_{\Gamma^m}^2 = 0.$$

因此, 存在常数 $\kappa^c \in \mathbb{R}$ 和常向量 $\vec{X}^c \in \mathbb{R}^d$, 使得 $\kappa = \kappa^c$, 且在 Γ^m 上有 $\vec{X} = \vec{X}^c$ 。由

(77b) 及 (19) 得

$$0 = \langle \kappa^c \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h = \kappa^c \langle \vec{\omega}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m). \quad (78)$$

若假设 $\kappa^c \neq 0$, 则在 (78) 中取 $\vec{\eta} = \vec{\omega}^m \in \underline{V}(\Gamma^m)$, 由 (16) 得 $|\vec{\omega}^m|_{\Gamma^m}^h = 0$, 从而 $\vec{\omega}^m = \vec{0}$. 这显然与假设 64(i) 矛盾, 故 $\kappa^c = 0$. 此外, 与引理 66 的证明相同, 由 (77a) 及假设 64(i) 得 $\vec{X}^c = 0$. 至此证明了 (76) 存在唯一解 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$. $\square$

与 §4.5 类似, 可以证明格式 (76) 在 $d = 2$ 及 $d = 3$ 时无条件稳定.

定理 87 设 $d = 2$ 或 $d = 3$. 设 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 是 (76) 的一个解. 则

$$|\Gamma^{m+1}| + \Delta t_m |\nabla_s \kappa^{m+1}|_{\Gamma^m}^2 \leq |\Gamma^m|.$$

证明 在 (76a) 中取 $\chi = \kappa^{m+1} \in V(\Gamma^m)$, 在 (76b) 中取 $\vec{\eta} = \frac{1}{\Delta t_m} (\vec{X}^{m+1} - \text{id}|_{\Gamma^m}) \in \underline{V}(\Gamma^m)$, 得到

$$\left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s (\vec{X}^{m+1} - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma^m} + \Delta t_m |\nabla_s \kappa^{m+1}|_{\Gamma^m}^2 = 0. \quad (79)$$

结合 (79) 与引理 57 即得所证. $\square$

5.3 半离散格式的体积守恒

几何演化方程的离散化有一个重要方面, 即在离散层面再现演化律的衰减性质与守恒性质. 本节讨论表面扩散格式 (76) 的体积守恒性质, 回顾 (73).

回顾定义 68, 考虑 (76) 的如下半离散变体. 给定闭多面体超曲面 $\Gamma^h(0)$, 求具有诱导速度 $\vec{\nu}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$ 的演化多面体超曲面 $\mathcal{G}_T^h$, 以及 $\kappa^h \in V(\mathcal{G}_T^h)$, 即对所有 $t \in [0, T]$ 有 $\vec{\nu}^h(\cdot, t) \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 及 $\kappa^h(\cdot, t) \in V(\Gamma^h(t))$, 使得对所有 $t \in (0, T]$,

$$\left\langle \vec{\nu}^h, \chi \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h - \left\langle \nabla_s \kappa^h, \nabla_s \chi \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^h(t)), \quad (80a)$$

$$\left\langle \kappa^h \vec{\nu}^h, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)). \quad (80b)$$

定理 88 设 $(\mathcal{G}_T^h, \kappa^h)$ 是 (80) 的一个解, 并设对于 $t \in [0, T]$, $\Omega^h(t)$ 是 $\Gamma^h(t)$ 所围的区域.

(i) 有

$$\frac{d}{dt} |\Gamma^h(t)| + |\nabla_s \kappa^h|_{\Gamma^h(t)}^2 = 0.$$

(ii) 有

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^d(\Omega^h(t)) = 0.$$

(iii) 对任意 $t \in (0, T]$, $\Gamma^h(t)$ 是共形多面体曲面。特别地, 当 $d = 2$ 时, 曲线 $\Gamma^h(t)$ 的任意两个相邻单元或者等长, 或者平行。

证明 (i) 类似于定理 79(i) 的证明, 在 (80a) 中取 $\chi = \kappa^h(\cdot, t) \in V(\Gamma^h(t))$, 在 (80b) 中取 $\vec{\eta} = \vec{\mathcal{V}}^h(\cdot, t) \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$, 得到

$$\frac{d}{dt} |\Gamma^h(t)| = \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = - |\nabla_s \kappa^h|_{\Gamma^h(t)}^2,$$

即所证。

(ii) 在 (80a) 中取 $\chi = 1$, 由定理 71、 $\vec{\mathcal{V}}^h(\cdot, t) \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 及 (20) 得

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^d(\Omega^h(t)) = \pm \left\langle \vec{\mathcal{V}}^h, \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = \pm \left\langle \vec{\mathcal{V}}^h, \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = 0,$$

其中符号 $\pm$ 取决于这里的 $\vec{\nu}^h$ 是 $\Omega^h(t)$ 在 $\Gamma^h(t)$ 上的外法向量还是内法向量。

(iii) 直接由定义 60 及定理 62 得到。 $\square$

笔记 89

- (i) 定理 88(i) 是全离散格式 (76) 的稳定性结论定理 87 的半离散对应形式, 并在离散层面再现了能量律 (74)。
- (ii) 定理 88(ii) 在离散层面再现了体积守恒性质 (73)。此外, 虽然全离散格式 (76) 并不精确保持所围体积, 但它满足

$$\left\langle \vec{X}^{m+1} - \text{id}, \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m} = \left\langle \vec{X}^{m+1} - \text{id}, \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h = 0,$$

回顾 (20)。由定理 71, 这可解释为定理 88(ii) 的全离散对应形式。事实上, 格式 (76) 在实际计算中具有极好的体积守恒性质: 当时间步长趋于零时, 所围体积的相对损失也趋于零。

5.4 向其他流的推广

表面扩散的有限元逼近 (76) 很容易推广到更一般的情形。在一定条件下, 所得离散仍满足稳定性结论。

这里考虑形如

$$\mathcal{V} = \mathfrak{F}(\varkappa) \quad \text{在} \quad \Gamma(t), \quad (81)$$

的流, 其中 $\mathfrak{F}$ 将闭超曲面 $\Gamma(t)$ 上的函数映为 $\Gamma(t)$ 上的函数。对于平均曲率流, 有 $\mathfrak{F}(\chi) = \chi$; 取 $\mathfrak{F}(\chi) = -\Delta_s \chi$ 则得到表面扩散。若映射 $\mathfrak{F}$ 满足

$$\langle \mathfrak{F}(\mathcal{K}), \mathcal{K} \rangle_{\Gamma(t)} \geq 0, \quad (82)$$

则由定理 32 得

$$\frac{d}{dt} |\Gamma(t)| = -\langle \mathcal{V}, \mathcal{K} \rangle_{\Gamma(t)} = -\langle \mathfrak{F}(\mathcal{K}), \mathcal{K} \rangle_{\Gamma(t)} \leq 0. \quad (83)$$

显然, 不等式 (82) 对于平均曲率流成立, 此时有

$$\langle \mathfrak{F}(\mathcal{K}), \mathcal{K} \rangle_{\Gamma(t)} = |\mathcal{K}|_{\Gamma(t)}^2 \geq 0,$$

对于表面扩散也成立, 此时有

$$\langle \mathfrak{F}(\mathcal{K}), \mathcal{K} \rangle_{\Gamma(t)} = |\nabla_s \mathcal{K}|_{\Gamma(t)}^2 \geq 0,$$

回顾 (74)。现在, 我们的目标是: 对于形如 (81) 且满足能量界 (83) 的流, 为其离散格式建立类似于定理 87 的稳定性结论。作为离散形式的相容性条件, 要求存在逼近 $\mathfrak{F}$ 的映射 $\mathfrak{F}^m : V(\Gamma^m) \rightarrow V(\Gamma^m)$, 并满足

$$\langle \mathfrak{F}^m(\chi), \chi \rangle_{\Gamma^m}^h \geq 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m). \quad (84)$$

现考虑 (81) 的如下有限元逼近。设闭多面体超曲面 Γ^0 是 $\Gamma(0)$ 的逼近。对 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 使得

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m}, \chi \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \langle \mathfrak{F}^m(\kappa^{m+1}), \chi \rangle_{\Gamma^m}^h = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (85a)$$

$$\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (85b)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 。我们得到如下稳定性定理, 以及线性情形的存在唯一性结论。

定理 90

- (i) 设 Γ^m 满足假设 64, 并设 $\mathfrak{F}^m : V(\Gamma^m) \rightarrow V(\Gamma^m)$ 是满足 (84) 的线性映射。则方程组 (85) 存在唯一解 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 。
- (ii) 设 $d = 2$ 或 $d = 3$ 。设 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 是 (85) 的一个解。则

$$|\Gamma^{m+1}| + \Delta t_m \langle \mathfrak{F}^m(\kappa^{m+1}), \kappa^{m+1} \rangle_{\Gamma^m}^h \leq |\Gamma^m|,$$

若 $\mathfrak{F}^m$ 满足 (84), 则左侧两项均非负。

证明 (i) 证明与引理 66 的证明类似。

(ii) 证明与定理 87 的证明类似。 $\square$

注记 91 (例)

(i) 取 $\mathfrak{F}(\varkappa) = -\Delta_s \varkappa$ 及 $\mathfrak{F}^m(\chi) = -\Delta_s^{\Gamma^m} \chi$ (回顾 (28)), 便得到表面扩散的定理 86 及定理 87。类似地, 取 $\mathfrak{F}(\varkappa) = \varkappa$ 及 $\mathfrak{F}^m(\chi) = \chi$, 便得到平均曲率流的定理 76 及定理 77。

(ii) 另一类值得关注的是非线性流 $\mathcal{V} = f(\varkappa)$, 即 $\mathfrak{F}(\varkappa) = f(\varkappa)$, 其中 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) 是严格单调递增的连续函数, 且 $f(0) = 0$ 。例如取 $f(r) = |r|^{\beta-1} r$, 其中 $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, 便可应用于图像分析, 见 Alvarez et al. (1993); Sapiro and Tannenbaum (1994); Mikula and Ševčovič (2001)。这里定义 $\mathfrak{F}^m(\chi) = \pi_{\Gamma^m} [f(\chi)]$, 回顾定义 43(i)。所得非线性格式 (85) 满足定理 90(ii) 的稳定性结论。(85) 的存在唯一性结论见 Barrett et al. (2008b, 定理 2.1)。

(iii) 体积守恒流

$$\mathcal{V} = \mathfrak{F}(\varkappa) = \varkappa - \int_{\Gamma(t)} \varkappa \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (86)$$

也属于可以证明稳定性的这一类; 其中定义平均值

$$\int_{\Gamma(t)} \varkappa = \frac{1}{|\Gamma(t)|} \int_{\Gamma(t)} \varkappa \, d\mathcal{H}^{d-1}, \quad (87)$$

这里对所有 $\chi \in V(\Gamma^m)$ 取 $\mathfrak{F}^m(\chi) = \chi - \int_{\Gamma^m} \chi \in V(\Gamma^m)$, 得到

$$\langle \mathfrak{F}^m(\chi), \chi \rangle_{\Gamma^m}^h = \left(\left| \chi - \int_{\Gamma^m} \chi \right|_{\Gamma^m}^h \right)^2 \geq 0,$$

故定理 90 的两项结论均成立。

(iv) 在材料科学中, (86) 称为表面附着受限动力学 (surface attachment limited kinetics, SALK)。介于 SALK 与表面扩散之间的流为

$$\mathcal{V} = -\Delta_s \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\xi} \Delta_s \right)^{-1} \varkappa \quad \text{在 } \Gamma(t),$$

其中 $\alpha, \xi \in \mathbb{R}_{>0}$ 。这一流由 Taylor and Cahn (1994) 提出, 作为材料科学中的界面演化律, 并由 Elliott and Garcke (1997); Escher et al. (2001) 作了分析。引入新变量 y , 可将其改写为

$$\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\nu} = -\Delta_s y, \quad \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\xi} \Delta_s \right) y = \varkappa, \quad \varkappa \vec{\nu} = \Delta_s \text{id} \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

因此, 对任意 $\chi \in V(\Gamma^m)$, 函数 $\mathfrak{F}^m(\chi) \in V(\Gamma^m)$ 由下式定义:

$$\langle \mathfrak{F}^m(\chi), \eta \rangle_{\Gamma^m}^h = \langle \nabla_s Y(\chi), \nabla_s \eta \rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \eta \in V(\Gamma^m), \quad (88)$$

其中 $Y \in V(\Gamma^m)$ 满足

$$\frac{1}{\xi} \langle \nabla_s Y, \nabla_s \varphi \rangle_{\Gamma^m} + \frac{1}{\alpha} \langle Y, \varphi \rangle_{\Gamma^m}^h = \langle \chi, \varphi \rangle_{\Gamma^m}^h \quad \forall \varphi \in V(\Gamma^m). \quad (89)$$

在 (88) 中取 $\eta = \chi$, 在 (89) 中取 $\varphi = \chi - \frac{1}{\alpha} Y$, 得到

$$\langle \mathfrak{F}^m(\chi), \chi \rangle_{\Gamma^m}^h = \langle \nabla_s Y, \nabla_s \chi \rangle_{\Gamma^m} = \frac{1}{\alpha} |\nabla_s Y|_{\Gamma^m}^2 + \xi \left(\left| \chi - \frac{1}{\alpha} Y \right|_{\Gamma^m}^h \right)^2 \geq 0,$$

因此, 在此情形也得到了稳定的离散格式, 并且定理 90 的两项结论均成立。

注记 92 (半离散格式与切向运动)

- (i) 与 §5.3 类似, 也可考虑注记 91 中各格式的半离散变体。每一种情形均满足定理 88(iii) 及定理 88(i) 的相应形式。若所逼近的流保持体积, 且 $\mathfrak{F}^m$ 的半离散对应映射对所有 $\chi \in V(\Gamma^h(t))$ 满足 $\langle \mathfrak{F}^h(\chi), 1 \rangle_{\Gamma^h(t)}^h = 0$ 则还满足定理 88(ii)。
- (ii) 对于曲线情形 $d = 2$, 在注记 91 的所有情形中, 均可仿照 (63) 考虑全离散全隐式格式。这些格式既继承注记 91 中的稳定性性质, 也满足强等分布性质 (64)。更多细节参阅 Barrett et al. (2011)。

5.5 抑制或诱导切向运动的逼近

本节考虑 (85b) 的另一种形式, 藉此可抑制切向运动, 或增强选定方向上的切向运动。为此, 假设 Γ^m 满足假设 64(ii), 并对 $i = 1, \dots, d-1$ 取 $\vec{\tau}_i^m \in \underline{V}(\Gamma^m)$, 使得对于 $k = 1, \dots, K$, $\left\{ \frac{\vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m)}{|\vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m)|}, \vec{\tau}_1^m(\vec{q}_k^m), \dots, \vec{\tau}_{d-1}^m(\vec{q}_k^m) \right\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一组标准正交基。此外, 选取系数 $0 \leq \alpha_i^m, \delta_i^m \in V(\Gamma^m)$, $i = 1, \dots, d-1$ 及外力项 $c_i^m \in V(\Gamma^m)$, $i = 1, \dots, d-1$ 。以如下逼近代替 (85)。

设闭多面体超曲面 Γ^0 是 $\Gamma(0)$ 的逼近。对 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 及 $\beta_i^{m+1} \in V(\Gamma^m)$, $i = 1, \dots, d-1$ 使得

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m}, \chi \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \langle \mathfrak{F}^m(\kappa^{m+1}), \chi \rangle_{\Gamma^m}^h &= 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \\ \left\langle \alpha_i^m \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m}, \xi \vec{\tau}_i^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \langle \alpha_i^m [\delta_i^m \beta_i^{m+1} + c_i^m], \xi \rangle_{\Gamma^m}^h &= 0 \quad \forall \xi \in V(\Gamma^m), \end{aligned} \quad (90a)$$

$$i = 1, \dots, d-1, \quad (90b)$$

$$\left\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m + \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i^m \beta_i^{m+1} \vec{\tau}_i^m, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (90c)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 。

定理 93

- (i) 设 Γ^m 满足假设 64, 并设 $\mathfrak{F}^m : V(\Gamma^m) \rightarrow V(\Gamma^m)$ 是满足 (84) 的线性映射。则方程组 (90) 存在解 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}, \beta_1^{m+1}, \dots, \beta_{d-1}^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times [V(\Gamma^m)]^d$, 其中 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}, \pi_{\Gamma^m} [\alpha_1^m \beta_1^{m+1}], \dots, \pi_{\Gamma^m} [\alpha_{d-1}^m \beta_{d-1}^{m+1}])$ 唯一。
- (ii) 设 $d = 2$ 或 $d = 3$ 。设 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}, \beta_1^{m+1}, \dots, \beta_{d-1}^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times [V(\Gamma^m)]^d$ 是 (90) 的一个解。则

$$|\Gamma^{m+1}| + \Delta t_m \langle \mathfrak{F}^m(\kappa^{m+1}), \kappa^{m+1} \rangle_{\Gamma^m}^h + \Delta t_m \langle \alpha_i^m [\delta_i^m \beta_i^{m+1} + c_i^m], \beta_i^{m+1} \rangle_{\Gamma^m}^h \leq |\Gamma^m|. \quad (91)$$

译注：底本此式的切向项未显式写出对 $i = 1, \dots, d-1$ 的求和；按随后将各切向方程相加的证明，该项应理解为这些指标的总和。同一证明中的式 (93) 亦然。

证明 (i) 令

$$B_i^m(\Gamma^m) = \{\xi \in V(\Gamma^m) : \xi(\vec{q}_k^m) = 0 \text{ 若 } \alpha_i^m(\vec{q}_k^m) = 0, k = 1, \dots, K\},$$

其中 $i = 1, \dots, d-1$ 。下面证明：将方程组 (90) 中的 $\beta_i^{m+1} \in V(\Gamma^m)$ 换成 $\beta_i^{m+1} \in B_i^m(\Gamma^m)$, 并将 (90b) 中的 $V(\Gamma^m)$ 换成 $B_i^m(\Gamma^m)$ 后, 所得方程组存在唯一解, 从而得到所需结论。照例, 该修改后的线性方程组的存在性由唯一性推出。因此, 设 $(\vec{X}, \kappa, b_1, \dots, b_{d-1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m) \times B_1^m(\Gamma^m) \times \dots \times B_{d-1}^m(\Gamma^m)$ 满足

$$\left\langle \vec{X}, \chi \vec{\omega}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \Delta t_m \langle \mathfrak{F}^m(\kappa), \chi \rangle_{\Gamma^m}^h = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (92a)$$

$$\left\langle \alpha_i^m \vec{X}, \xi \vec{\tau}_i^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \Delta t_m \langle \alpha_i^m \delta_i^m b_i, \xi \rangle_{\Gamma^m}^h = 0 \quad \forall \xi \in B_i^m(\Gamma^m), \quad (92b)$$

$$i = 1, \dots, d-1,$$

$$\left\langle \kappa \vec{\omega}^m + \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i^m b_i \vec{\tau}_i^m, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m), \quad (92c)$$

这里用到了 (19)。在 (92a) 中取 $\chi = \kappa \in V(\Gamma^m)$, 对于 $i = 1, \dots, d-1$ 在 (92b) 中

取 $\xi = b_i \in B_i^m(\Gamma^m)$, 并在 (92c) 中取 $\vec{\eta} = \vec{X} \in \underline{V}(\Gamma^m)$, 得到

$$\Delta t_m \langle \mathfrak{F}^m(\kappa), \kappa \rangle_{\Gamma^m}^h + \Delta t_m \langle \alpha_i^m \delta_i^m b_i, b_i \rangle_{\Gamma^m}^h + \left| \nabla_s \vec{X} \right|_{\Gamma^m}^2 = 0. \quad (93)$$

由 (93)、(84) 及关于 α_i^m 和 δ_i^m 的假设, 立即得到 $\vec{X}$ 在 Γ^m 上为常数。因此, 在 (92c) 中取 $\vec{\eta} = \vec{\tau}_i^m$, 得到 $|\pi_{\Gamma^m}[\alpha_i^m b_i]|_{\Gamma^m}^h = 0$, 从而 $\pi_{\Gamma^m}[\alpha_i^m b_i] = 0$, 这又意味着对于 $i = 1, \dots, d-1$ 有 $b_i = 0 \in B_i^m(\Gamma^m)$ 。余下证明与引理 66 相同, 得到 $\kappa = 0$ 及 $\vec{X} = \vec{0}$ 。这证明了 (92) 的解的唯一性, 进而证明了本证明开头所述修改后的方程组存在解 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}, \beta_1^{m+1}, \dots, \beta_{d-1}^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m) \times B_1^m(\Gamma^m) \times \dots \times B_{d-1}^m(\Gamma^m)$ 。显然, 这个解也满足原方程组 (90a), 只是在 α_i^m 为零的地方, β_i^{m+1} 的值可以任意选取。

(ii) 在 (90a) 中取 $\chi = \kappa^{m+1} \in V(\Gamma^m)$, 对于 $i = 1, \dots, d-1$ 在 (90b) 中取 $\xi = \beta_i^{m+1} \in V(\Gamma^m)$, 并在 (90c) 中取 $\vec{\eta} = \frac{1}{\Delta t_m} (\vec{X}^{m+1} - \text{id}|_{\Gamma^m}) \in \underline{V}(\Gamma^m)$, 由引理 57 即得所需结论。□

笔记 94

- (i) 显然, 在 (90) 中对 $i = 1, \dots, d-1$ 取 $\alpha_i^m = 0$, 便退化为原格式 (85)。
- (ii) 在 $d = 2$ 或 $d = 3$ 的情形, 若 $\mathfrak{F}^m$ 满足 (84), 且对于 $i = 1, \dots, d-1$ 有 $c_i^m = 0$, 则 (91) 给出了 (90) 的稳定性估计。
- (iii) 对于 $i = 1, \dots, d-1$ 取 $\delta_i^m(\vec{q}_k^m) = 1$ 及 $c_i^m(\vec{q}_k^m) = 0$, 由 (91) 可直观地看出: 当 $\alpha_i^m(\vec{q}_k^m)$ 较大时, $\vec{q}_k^m$ 在 $\vec{\tau}_i^m(\vec{q}_k^m)$ 方向上的切向运动将受到抑制。反之, 由 (90b) 也明显可见, 取 $\delta_i^m(\vec{q}_k^m) = 0$ 及 $\alpha_i^m(\vec{q}_k^m) > 0$, 就能固定切向运动。这些观察给出了控制几何流离散演化中切向运动的一种途径。具体而言, Barrett et al. (2008d) 提出并采用了如下策略:

- (S1) $\alpha_i^m = \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\delta_i^m = 1$, $c_i^m = 0$;
- (S2) $\alpha_i^m = \alpha \in \mathbb{R}_{> 0}$, $\delta_i^m = \delta \in \mathbb{R}_{> 0}$,
 $c_i^m(\vec{q}_k^m) = \frac{1}{\Delta t_m} (\vec{z}_k^m - \vec{q}_k^m) \cdot \vec{\tau}_i^m(\vec{q}_k^m)$, $k = 1, \dots, K$;
- (S3) $\alpha_i^m = 1$, $\delta_i^m = 0$,
 $c_i^m(\vec{q}_k^m) = \frac{1}{\Delta t_m} (\vec{z}_k^m - \vec{q}_k^m) \cdot \vec{\tau}_i^m(\vec{q}_k^m)$, $k = 1, \dots, K$;

其中 $i = 1, \dots, d-1$, $\vec{z}_k^m$ 是 $\vec{q}_k^m$ 的相邻节点的平均值。这些策略的作用可归纳如下。随着 $\alpha > 0$ 增大, (S1) 使 $|\beta_i^{m+1}|$ 、 $i = 1 \rightarrow d-1$ 减小, 因而减弱切向运动, 见 (90c)。策略 (S2) 则旨在诱导朝向“重心” $\vec{z}_k^m$ 的切向运动。最后, (S3) 完全固定切向运动, 使得每个顶点 $\vec{X}^{m+1}(\vec{q}_k^m)$ 在时间步结束后与 $\vec{z}_k^m$ 具有相同的切向分量。

- (iv) 与 §5.3 类似, 也可考虑格式 (90) 的半离散变体。它满足定理 88(i) 的相应形式; 当所逼近的流保持体积时, 还满足定理 88(ii)。

笔记 95

- (i) 还可考虑与 (85) 和 (90) 密切相关的两个变体：将 (85) 和 (90) 中的 $\vec{v}^m$ 项换成 $\frac{\vec{\omega}^m}{|\vec{\omega}^m|}$ 。回顾 (19)，这仅是对原格式的小幅修改，即将每个顶点处的 $\vec{\omega}^m$ 归一化。对于这些变体，定理 90 和定理 93 的所有结论仍成立，注记 92(i)¹ 和注记 94 中的大部分结论也仍成立。后两个注中唯一不再成立的性质是体积守恒。由定理 88(ii) 的证明可见，体积守恒要求 (85) 和 (90) 中出现 $\vec{v}^m$ ；因此，我们通常倾向于采用这些格式的原始形式。
- (ii) 对于平均曲率流，当 $\mathfrak{F}^m(\chi) = \chi$ 时，采用注记 94(iii) 中策略 (S1) 得到的 (90) 的解 $\vec{X}^{m+1} \in \underline{V}(\Gamma^m)$ 满足

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t_m} \left\langle \left[\left(\vec{X}^{m+1} - \text{id} \right) \cdot \vec{\omega}^m \right] \vec{\omega}^m + \alpha \sum_{i=1}^{d-1} \left[\left(\vec{X}^{m+1} - \text{id} \right) \cdot \vec{\tau}_i^m \right] \vec{\tau}_i^m, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m}^h \\ + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m). \end{aligned} \quad (94)$$

将 (94) 中的 $\vec{\omega}^m$ 归一化，可得一个密切相关的逼近

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t_m} \left\langle \left[\left(\vec{X}^{m+1} - \text{id} \right) \cdot \vec{\omega}^m \right] \frac{\vec{\omega}^m}{|\vec{\omega}^m|^2} + \alpha \sum_{i=1}^{d-1} \left[\left(\vec{X}^{m+1} - \text{id} \right) \cdot \vec{\tau}_i^m \right] \vec{\tau}_i^m, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m}^h \\ + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m), \end{aligned} \quad (95)$$

它对应于 (i) 中所述 (90) 的变体。对 $\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 引入满足

$$Q_\theta^m(\vec{q}_k^m) = \theta \text{Id} + (1 - \theta) \frac{\vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m) \otimes \vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m)}{|\vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m)|^2}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (96)$$

的 $Q_\theta^m \in V(\Gamma^m)$ ，由 $\{\frac{\vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m)}{|\vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m)|}, \vec{\tau}_1^m(\vec{q}_k^m), \dots, \vec{\tau}_{d-1}^m(\vec{q}_k^m)\}$ 为标准正交基这一事实，立即得到：对每个 $k = 1, \dots, K$ 及每个 $\vec{z} \in \mathbb{R}^d$ ，

$$\begin{aligned} [\vec{z} \cdot \vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m)] \frac{\vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m)}{|\vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m)|^2} + \alpha \sum_{i=1}^{d-1} [\vec{z} \cdot \vec{\tau}_i^m(\vec{q}_k^m)] \vec{\tau}_i^m(\vec{q}_k^m) \\ = (1 - \alpha) \vec{z} \cdot \vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m) \frac{\vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m)}{|\vec{\omega}^m(\vec{q}_k^m)|^2} + \alpha \vec{z} = Q_\alpha^m(\vec{q}_k^m) \vec{z}. \end{aligned}$$

因此，对于 $\alpha = \theta$ ，(95) 等价于

$$\left\langle Q_\theta^m \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m}, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m). \quad (97)$$

¹译注：底本此处的注记编号误指前一条，现改指所引用子项所属的注记。

显然, $\theta = 1$ 退化为采用质量集中的 (68), 而 $\theta = 0$ 则是将 $\tilde{\omega}^m$ 归一化后的 (47), 回顾 (i)。对于 $\theta \in (0, 1)$, 得到二者之间的某种插值, 其切向运动与注记 94(iii) 中 (S1) 在 $\alpha = \theta$ 时所述相同。还应注意, Elliott and Fritz (2017) 在 $d = 2$ 情形的主要思想, 是将 $\theta \text{Id} + (1 - \theta) \tilde{\nu}^m \otimes \tilde{\nu}^m$ 引入 (72) 的第一项中; 其方式与 (97) 相对于 (68) 的修改类似。

注记 96 (离散线性方程组) 稍作修改 §4.3 中的定义与方法, 即可导出逼近格式 (76)、(85) 和 (90) 在每个时间层所须求解的离散线性方程组。最有效的求解方式是采用 UMFPACK 等稀疏直接求解方法, 见 Davis (2004)。

5.6 其他参数方法

Bänsch et al. (2005) 给出了表面扩散的另一种参数有限元逼近。他们的格式基于

$$\vec{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \vec{\nu}, \quad \mathcal{V} = -\Delta_s \kappa, \quad \kappa = \vec{\kappa} \cdot \vec{\nu}, \quad \vec{\kappa} = \Delta_s \vec{\text{id}}, \quad \text{在 } \Gamma(t),$$

的离散, 而非 (75) 的离散。与 (76) 相比, 该方法多出两个变量; 又因曲面的运动方向始终与法向量共线, 曲面网格一般会逐渐恶化。

另见 Bänsch et al. (2004), 其中在假设解足够光滑的条件下, 对表面扩散的图像形式给出了采用次数满足 $k \geq 1$ 的连续分片多项式的半离散有限元逼近的误差分析。Coleman et al. (1996) 考虑了轴对称表面扩散的图像形式, 并采用连续分片线性函数作半离散有限元逼近。其相应误差分析在假设解足够光滑的条件下由 Deckelnick et al. (2003) 给出。此外, Barrett et al. (2019b) 还考虑了轴对称表面扩散的参数有限元逼近。

第六章

各向异性流

6.1 支配方程的推导

在许多界面问题中，能量密度依赖于方向。这种依赖性可以源自材料物理性质的方向依赖性。例如，在晶体中，界面能取决于界面方向与晶格取向之间的关系。典型的各向异性表面能具有如下形式：

$$|\Gamma|_\gamma = \int_{\Gamma} \gamma(\vec{\nu}) \, d\mathcal{H}^{d-1}, \quad (98)$$

其中 Γ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的闭可定向 C^1 超曲面， $d \geq 2$ ，其单位法向量场为 $\vec{\nu}$ ； $\gamma: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 是给定的各向异性能量密度。为便于数学处理，将 γ 延拓为 $\mathbb{R}^d$ 上的函数。仍以 γ 表示此延拓，并假定它是一阶绝对齐次的，即

$$\gamma(\lambda \vec{p}) = |\lambda| \gamma(\vec{p}) \quad \forall \vec{p} \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}.$$

以下假设 $\gamma \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{\vec{0}\})$ 。对此恒等式关于 λ 求导，得

$$\gamma'(\vec{p}) \cdot \vec{p} = \gamma(\vec{p}) \quad \forall \vec{p} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{0}\}, \quad (99)$$

其中 γ' 是 γ 的梯度。各向同性情形下， $\gamma(\vec{p}) = |\vec{p}|$ ，从而 $\gamma'(\vec{p}) = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ 。关于材料科学与几何中的各向异性能量，可参阅 Taylor et al. (1992); Bellettini et al. (1999); Giga (2006)。

引理 97 设 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ 为 C^2 演化的闭可定向超曲面，其法向量场为 $\vec{\nu}$ 。则有式 (36)

的各向异性版本

$$\frac{d}{dt} |\Gamma(t)|_\gamma = - \langle \kappa_\gamma, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)},$$

其中 $\kappa_\gamma = -\nabla_s \cdot \vec{\nu}_\gamma$ 为加权平均曲率, 其定义是引理13(i) 的各向异性对应形式; $\vec{\nu}_\gamma = \gamma'(\vec{\nu})$ 为 Cahn–Hoffmann 向量。

证明 由输运定理 (定理 32), 结合式 (98)、(99)、引理 37(ii)、定理 21 及引理 7(i), 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\Gamma(t)|_\gamma &= \frac{d}{dt} \langle 1, \gamma(\vec{\nu}) \rangle_{\Gamma(t)} = \langle 1, \partial_t^\square \gamma(\vec{\nu}) - \gamma(\vec{\nu}) \mathcal{V} \kappa \rangle_{\Gamma(t)} \\ &= \langle 1, \gamma'(\vec{\nu}) \cdot \partial_t^\square \vec{\nu} - \gamma'(\vec{\nu}) \cdot \vec{\nu} \mathcal{V} \kappa \rangle_{\Gamma(t)} \\ &= \langle 1, -\gamma'(\vec{\nu}) \cdot \nabla_s \mathcal{V} + \nabla_s \cdot (\gamma'(\vec{\nu}) \mathcal{V}) \rangle_{\Gamma(t)} \\ &= \langle \nabla_s \cdot \gamma'(\vec{\nu}), \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} = - \langle \kappa_\gamma, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)}. \end{aligned}$$

□

因此可将平均曲率流与表面扩散的各向异性版本分别定义为

$$(a) \quad \mathcal{V} = \beta(\vec{\nu}) \kappa_\gamma \quad \text{和} \quad (b) \quad \mathcal{V} = -\nabla_s \cdot (\beta(\vec{\nu}) \nabla_s \kappa_\gamma), \quad (100)$$

其中 $\beta : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 是光滑的动力学系数。上述演化律的推导及进一步说明, 见 Taylor et al. (1992); Cahn and Taylor (1994); Taylor and Cahn (1994); Giga (2006)。

对各向异性平均曲率流, 由引理 97 和式 (100) 得

$$\frac{d}{dt} |\Gamma(t)|_\gamma = - \langle \kappa_\gamma, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} = - \langle \beta(\vec{\nu}), \kappa_\gamma^2 \rangle_{\Gamma(t)} \leq 0, \quad (101)$$

而对各向异性表面扩散, 由引理 7(i)、定义 5(ii) 及散度定理 (定理 21) 可得

$$\frac{d}{dt} |\Gamma(t)|_\gamma = - \langle \kappa_\gamma, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} = - \left\langle \beta(\vec{\nu}), |\nabla_s \kappa_\gamma|^2 \right\rangle_{\Gamma(t)} \leq 0. \quad (102)$$

对表面能 $|\Gamma|_\gamma$, 自然也可以提出等周问题: 在围成给定体积的所有形状中, 求使 $|\Gamma|_\gamma$ 最小的形状。为此定义对偶函数

$$\gamma^*(\vec{q}) = \sup_{\vec{p} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{0}\}} \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\gamma(\vec{p})} \quad \forall \vec{q} \in \mathbb{R}^d.$$

则等周问题的解在相差一个缩放的意义下, 是 Wulff 形状

$$\mathcal{W} = \{\vec{q} \in \mathbb{R}^d : \gamma^*(\vec{q}) \leq 1\}.$$

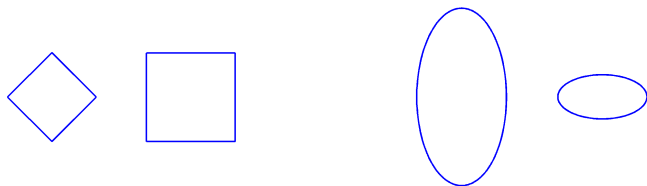


图 3: $\mathbb{R}^2$ 中的 Frank 图及 Wulff 形状。左: l^1 范数, $\gamma(\vec{p}) = \sum_{i=1}^2 |p_i|$; 右: 加权范数 $\gamma(\vec{p}) = (\vec{p} \cdot G \vec{p})^{\frac{1}{2}}$, $G = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

这是 γ^* 的 1 球。还定义 γ 的 1 球

$$\mathcal{F} = \{\vec{p} \in \mathbb{R}^d : \gamma(\vec{p}) \leq 1\},$$

称之为 Frank 图, 例子见图 3。Frank 图或 Wulff 形状具有平坦部分、棱和角点的表面能也颇受关注; 它们称为晶体表面能, 以下方法同样能够对其作稳定逼近。

6.2 适当的弱形式

构造稳定离散格式十分困难, 因为流

$$\mathcal{V} = \beta(\vec{\nu}) \kappa_\gamma \quad \text{和} \quad \mathcal{V} = -\nabla_s \cdot (\beta(\vec{\nu}) \nabla_s \kappa_\gamma) \quad \text{在 } \Gamma(t)$$

的非线性比各向同性情形更强。主要困难在于, 恒等式

$$\vec{\kappa} = \kappa \vec{\nu} = \Delta_s \vec{\text{id}} \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (103)$$

(见引理 13(ii)) 的对应形式一般不再成立。不过, 在许多实际情形中, 本文作者得到了式 (103) 的各向异性版本。

关键观察是: 若将 $\mathbb{R}^d$ 中的标准 Euclid 内积替换为内积

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\tilde{G}} = \vec{u} \cdot \tilde{G} \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^d, \quad (104)$$

, 其中 $\tilde{G} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 为对称正定矩阵, 则式 (103) 仍可成立。只须将平均曲率向量 $\vec{\kappa}$ 与 Laplace–Beltrami 算子 Δ_s 替换为适合这一新内积的相应版本。实际上, 只需考虑新内积所给 Riemann 度量下, $\Gamma(t)$ 上的典范 Laplace–Beltrami 算子。不过, 仍须确定与

新内积相应的表面能密度。由 Barrett et al. (2008a, 引理 2.1) 可知,

$$\gamma(\vec{\nu}) = \sqrt{\vec{\nu} \cdot G \vec{\nu}} \quad (105)$$

给出 $\tilde{G} = [\det G]^{\frac{1}{d-1}} G^{-1}$ 及加权平均曲率 κ_γ , 并使之满足类似于各向同性情形的关系 (参见式 (103))。具体而言, 有

$$\kappa_\gamma \vec{\nu} = \gamma(\vec{\nu}) \tilde{G} \Delta_s^{\tilde{G}} \text{id} \quad \text{在 } \Gamma(t),$$

见 Barrett et al. (2008a, (2.33), (2.37))。其中 $\Delta_s^{\tilde{G}} = \nabla_s^{\tilde{G}} \cdot \nabla_s^{\tilde{G}}$ 是内积 (104) 所诱导¹的 Laplace–Beltrami 算子, $(\nabla_s^{\tilde{G}} \cdot)$ 与 $\nabla_s^{\tilde{G}}$ 分别是相应的切向散度与切向梯度。流形上适当的广义散度定理可用来引入 $\gamma(\vec{\nu}) \tilde{G} \Delta_s^{\tilde{G}} \text{id}$ 的弱形式。遗憾的是, 式 (105) 所示的简单各向异性仅能给出椭球型 Wulff 形状, 如图 3 右侧所示; 我们希望处理的情形当然更为一般。

现在考虑更大的一类表面能密度: 它们由椭球型各向异性能量的适当范数给出。具体取

$$\gamma(\vec{p}) = \left(\sum_{\ell=1}^L [\gamma_\ell(\vec{p})]^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad \gamma_\ell(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p} \cdot G_\ell \vec{p}}, \quad \ell = 1, \dots, L, \quad (106)$$

从而

$$\gamma'(\vec{p}) = [\gamma(\vec{p})]^{1-r} \sum_{\ell=1}^L [\gamma_\ell(\vec{p})]^{r-1} \gamma'_\ell(\vec{p}).$$

其中 $r \in [1, \infty)$, 且 $G_\ell \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ($\ell = 1, \dots, L$) 均为对称正定矩阵。大多数有意义的能量都可用上述能量类逼近。特别地, 适当选择 r, L 与 $\{G_\ell\}_{\ell=1}^L$, 便可建立六角对称和立方对称各向异性的模型, 见图 4。注意, 在平面情形 $d = 2$ 下, 从建模角度看, 选择 $r > 1$ 并无益处。此外, 选择 $r = 1$ 的优点在于所得格式是线性的, 即每一时间层只需求解一个线性方程组。

第 2 章中讨论的曲面微积分, 大部分都可推广到上述能量的情形。例如, 对 C^2 超曲面 Γ , 有 (见 Barrett et al. (2008a, 定理 2.1))

$$\kappa_\gamma \vec{\nu} = \sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell(\vec{\nu}) \tilde{G}_\ell \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \cdot \left[\left[\frac{\gamma_\ell(\vec{\nu})}{\gamma(\vec{\nu})} \right]^{r-1} \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \text{id} \right] \quad \text{在 } \Gamma, \quad (107)$$

其中 $\tilde{G}_\ell = [\det G_\ell]^{\frac{1}{d-1}} G_\ell^{-1}$, $\ell = 1, \dots, L$ 及 $\nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \cdot, (\nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \cdot)$ 定义如下。设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 是 C^1 超曲面, $\vec{p} \in \Gamma$; 又设 $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_{d-1}\}$ 是 $T_{\vec{p}}\Gamma$ 关于 $\tilde{G}_\ell$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上诱导的内积 $(\cdot, \cdot)_{\tilde{G}_\ell}$ 的一组标准正交基, 参见式 (104)。设 $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \vec{f}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为 C^1 函数。 f 的各向

¹译注: 底本此处误引平均曲率恒等式, 现改指前文所定义的内积。

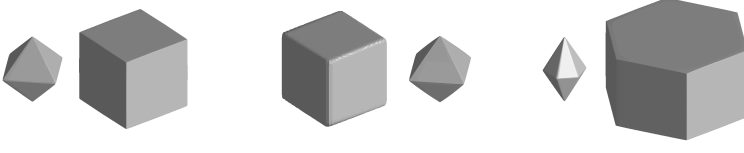


图 4: $\mathbb{R}^3$ 中的 Frank 图及 Wulff 形状。左: 正则化的 l^1 范数, $\gamma(\vec{p}) = \sum_{\ell=1}^3 [\varepsilon^2 |\vec{p}|^2 + p_\ell^2(1-\varepsilon^2)]^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon = 0.01$; 中: 立方对称各向异性, $\gamma(\vec{p}) = [\sum_{\ell=1}^3 [\varepsilon^2 |\vec{p}|^2 + p_\ell^2(1-\varepsilon^2)]^{\frac{r}{2}}]^{\frac{1}{r}}$, $\varepsilon = 0.01$, $r = 30$; 右: 六角对称各向异性, $\gamma(\vec{p}) = \sum_{\ell=1}^4 [\vec{p} \cdot R_\ell^\top \text{diag}(1, \varepsilon^2, \varepsilon^2) R_\ell \vec{p}]^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon = 0.01$ 。这里 R_ℓ ($\ell = 1, \dots, 4$) 为适当的旋转矩阵。

异性曲面梯度、 $\vec{f}$ 的各向异性曲面散度, 以及 $\vec{f}$ 的各向异性曲面 Jacobian 矩阵, 在点 $\vec{p} \in \Gamma$ 处分别定义为

$$(\nabla_s^{\tilde{G}_\ell} f)(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{d-1} (\partial_{\vec{\tau}_i} f)(\vec{p}) \vec{\tau}_i, \quad (108a)$$

$$(\nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \cdot \vec{f})(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{d-1} \tilde{G}_\ell \vec{\tau}_i \cdot (\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{f})(\vec{p}), \quad (108b)$$

$$(\nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \vec{f})(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{d-1} (\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{f})(\vec{p}) \otimes \tilde{G}_\ell \vec{\tau}_i. \quad (108c)$$

定义 (108) 是 $n = d - 1$ 时定义 5(ii)–(iv) 的各向异性版本。若进一步有 $\vec{g} \in C^1(\Gamma)$, 则还定义

$$\left(\nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \vec{f}, \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \vec{g} \right)_{\tilde{G}_\ell}(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{d-1} \left((\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{f})(\vec{p}), (\partial_{\vec{\tau}_i} \vec{g})(\vec{p}) \right)_{\tilde{G}_\ell}.$$

借助广义散度定理 (见 Barrett et al. (2008a, 引理 2.8)), 当各向异性能量密度 γ 具有式 (106) 的形式时, 可得到各向异性流 (100) 的如下弱形式。给定闭超曲面 $\Gamma(0)$, 求具有整体参数化的演化超曲面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$, 并以 $\vec{\nu}$ 表示由该参数化诱导的速度场; 同时求 $\varkappa_\gamma \in L^2(\mathcal{G}_T)$, 具体如下。对几乎所有 $t \in (0, T)$, 求 $\vec{\nu}(\cdot, t) \in [L^2(\Gamma(t))]^d$ 及 $\varkappa_\gamma(\cdot, t) \in L^2(\Gamma(t))$; 对于表面扩散, 后者还须属于 $H^1(\Gamma(t))$, 并使得

$$\left\langle \vec{\nu}, \chi \vec{\nu} \right\rangle_{\Gamma(t)} = \begin{cases} \langle \beta(\vec{\nu}) \varkappa_\gamma, \chi \rangle_{\Gamma(t)} & \forall \chi \in L^2(\Gamma(t)) \\ \langle \beta(\vec{\nu}) \nabla_s \varkappa_\gamma, \nabla_s \chi \rangle_{\Gamma(t)} & \forall \chi \in H^1(\Gamma(t)) \end{cases}, \quad (109a)$$

$$\langle \varkappa_\gamma \vec{\nu}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \nabla_s^{\tilde{G}} \text{id}, \nabla_s^{\tilde{G}} \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma(t), \gamma} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d, \quad (109b)$$

其中

$$\left\langle \nabla_s^{\tilde{G}} \vec{\chi}, \nabla_s^{\tilde{G}} \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma(t), \gamma} = \sum_{\ell=1}^L \int_{\Gamma(t)} \left[\frac{\gamma_\ell(\vec{\nu})}{\gamma(\vec{\nu})} \right]^{r-1} (\nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \vec{\chi}, \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \vec{\eta})_{\tilde{G}_\ell} \gamma_\ell(\vec{\nu}) \, d\mathcal{H}^{d-1} \quad (110)$$

对所有 $\vec{\chi}, \vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d$ 成立。上述弱形式仅含至多一阶导数，因此再次可以用连续分片线性有限元将这些方程离散化。

6.3 有限元逼近

利用弱形式 (109)，可以构造 (100) 的有限元逼近。仿照各向同性平均曲率流的式 (41)，将速度与几何离散化，便得到 Barrett et al. (2008c,a) 中的如下有限元逼近。

设闭多面体超曲面 Γ^0 是 $\Gamma(0)$ 的逼近。对 $m = 0, \dots, M-1$ ，求满足 $\vec{X}^{m+1} \in \underline{V}(\Gamma^m)$ 的 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ ，其单位法向量为 $\vec{\nu}^{m+1}$ ；同时求 $\kappa_\gamma^{m+1} \in V(\Gamma^m)$ ，使得

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m}, \chi \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h = \begin{cases} \langle \beta(\vec{\nu}^m) \kappa_\gamma^{m+1}, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h \\ \langle \beta(\vec{\nu}^m) \nabla_s \kappa_\gamma^{m+1}, \nabla_s \chi \rangle_{\Gamma^m} \end{cases} \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (111a)$$

$$\langle \kappa_\gamma^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \vec{X}^{m+1}, \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m, \gamma} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m). \quad (111b)$$

以上使用记号

$$\begin{aligned} & \left\langle \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \vec{X}^{m+1}, \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m, \gamma} \\ &= \sum_{\ell=1}^L \int_{\Gamma^m} \left[\frac{\gamma_\ell(\vec{\nu}^{m+1} \circ \vec{X}^{m+1})}{\gamma(\vec{\nu}^{m+1} \circ \vec{X}^{m+1})} \right]^{r-1} (\nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \vec{X}^{m+1}, \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \vec{\eta})_{\tilde{G}_\ell} \gamma_\ell(\vec{\nu}^m) \, d\mathcal{H}^{d-1}, \end{aligned}$$

即式 (110) 的离散对应形式。

注记 98 (平面曲线) 沿用 §3.1.2 的记号，与 (48) 类似，在 $d = 2$ 的情形下，即对于平面曲线的演化，方程组 (111) 可大为简化，亦见 Barrett et al. (2008a, (3.5))。具体而言，可将 (111) 改写如下。设 $\vec{X}^0 \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ 使 $\Gamma^0 = \vec{X}^0(\mathbb{I})$ 是 $\Gamma(0)$ 的多边形逼近。对 $m = 0, \dots, M-1$ ，求 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa_\gamma^{m+1}) \in \underline{V}^h(\mathbb{I}) \times V^h(\mathbb{I})$ ，使得

$$-\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m}{\Delta t_m}, \chi [\vec{X}_\rho^m]^\perp \right\rangle_{\mathbb{I}}^h = \left\langle \left\langle \beta \left(-\frac{[\vec{X}_\rho^m]^\perp}{|\vec{X}_\rho^m|} \right) \kappa_\gamma^{m+1}, \chi |\vec{X}_\rho^m| \right\rangle_{\mathbb{I}}^h \right\rangle_{\mathbb{I}} = \left\langle \left\langle \beta \left(-\frac{[\vec{X}_\rho^m]^\perp}{|\vec{X}_\rho^m|} \right) (\kappa_\gamma^{m+1})_\rho, \chi_\rho |\vec{X}_\rho^m|^{-1} \right\rangle_{\mathbb{I}} \right\rangle_{\mathbb{I}}, \quad (112a)$$

$$-\left\langle \kappa_\gamma^{m+1} [\vec{X}_\rho^m]^\perp, \vec{\eta} \right\rangle_{\mathbb{I}} + \sum_{\ell=1}^L \left\langle \left[\frac{\gamma_\ell([\vec{X}_\rho^{m+1}]^\perp)}{\gamma([\vec{X}_\rho^{m+1}]^\perp)} \right]^{r-1} \frac{G_\ell[\vec{X}_\rho^{m+1}]^\perp}{\gamma_\ell([\vec{X}_\rho^{m+1}]^\perp)}, \vec{\eta}_\rho^\perp \right\rangle_{\mathbb{I}} = 0 \quad (112b)$$

对所有 $\chi \in V^h(\mathbb{I})$ 和 $\vec{\eta} \in \underline{V}^h(\mathbb{I})$ 成立。

当 (106) 中 $r = 1$ 时, 方程组 (111) 不依赖于 $\vec{\nu}^{m+1}$, 因而化为以 $\vec{X}^{m+1}$ 与 κ_γ^{m+1} 为未知量的线性方程组。对于这些离散系统, 有如下存在唯一性结果; 将相应各向同性情形的证明推广即可得到, 见定理 76 和 86。

定理 99 设 Γ^m 满足假设 64(i), 且 γ 具有 (106) 的形式, 其中 $r = 1$ 。则方程组 (111) 存在唯一解 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa_\gamma^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 。

证明 这两个结论的证明与定理 76 和 86 的证明相同, 亦见 Barrett et al. (2008a, 定理 3.1)。□

注记 100 对于 $r > 1$ 的非线性离散格式, 目前尚无存在性或唯一性结果。不过, 实际求解非线性方程组 (111) 并无困难, 所用的迭代求解器总能收敛。

格式 (111) 的主要性质, 是其稳定性可以得到证明。由此便能计算强各向异性、接近晶型各向异性问题的解; 文献中的其他格式往往难以做到这一点。关键在于, 各向异性能量满足一个局部不等式, 类似于引理 55 在 $d = 3$ 时给出的各向同性版本。具体有如下结果。

引理 101 设 $d = 3$, 且 $\Gamma^h = \bigcup_{j=1}^J \bar{\sigma}_j$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的多面体超曲面, 其单位法向量为 $\vec{\nu}^h$ 。则对 $j = 1, \dots, J$ 和 $\ell = 1, \dots, L$, 有

$$\frac{1}{2} \int_{\sigma_j} \gamma_\ell(\vec{\nu}^h) |\nabla_s^{\vec{G}_\ell} \vec{X}|_{\vec{G}_\ell}^2 d\mathcal{H}^2 \geq \int_{\vec{X}(\sigma_j)} \gamma_\ell(\vec{\nu}_X^h) d\mathcal{H}^2 \quad \forall \vec{X} \in \underline{V}(\Gamma^h),$$

当 $\vec{X} = \text{id}|_{\Gamma^h} \in \underline{V}(\Gamma^h)$ 时等号成立。其中 $\vec{\nu}_X^h$ 是多面体超曲面 $\vec{X}(\Gamma^h)$ 上的单位法向量, 且 $|\cdot|_{\vec{G}_\ell}^2 = (\cdot, \cdot)_{\vec{G}_\ell}$ 。

证明 见 Barrett et al. (2008a, 引理 3.1)。□

引理 102 设 γ 具有 (106) 的形式, $d = 2$ 或 $d = 3$ 。设 $\Gamma^h = \bigcup_{j=1}^J \bar{\sigma}_j$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的多面体超曲面, 其单位法向量为 $\vec{\nu}^h$ 。设 γ 具有 (106) 的形式, 且 $\vec{X} \in \underline{V}(\Gamma^h)$ 。则

$$\left\langle \nabla_s^{\vec{G}} \vec{X}, \nabla_s^{\vec{G}} (\vec{X} - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma^h, \gamma} \geq |\vec{X}(\Gamma^h)|_\gamma - |\Gamma^h|_\gamma,$$

其中 $|\Gamma^h|_\gamma = \langle 1, \gamma(\vec{\nu}^h) \rangle_{\Gamma^h}$ 。

证明 $d = 3$ 时的证明依赖于引理 101, 见 Barrett et al. (2008a, 定理 3.2)。结合注

记 98, 对于 $d = 2$ 且 $r = 1$ 的情形, 可采用类似于引理 57 证明中式 (27) 的思路, 见 Barrett et al. (2008c, 定理 2.5)。利用 Barrett et al. (2008a, 定理 3.2) 中的技巧, 可容易地推广到 $r \geq 1$ 的情形。□

定理 103 设 γ 具有 (106) 的形式, $d = 2$ 或 $d = 3$ 。设 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa_\gamma^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 是 (111) 的解, 则有

$$|\Gamma^{m+1}|_\gamma + \Delta t_m \begin{cases} \langle \beta(\vec{\nu}^m) \kappa_\gamma^{m+1}, \kappa_\gamma^{m+1} \rangle_{\Gamma^m}^h \\ \langle \beta(\vec{\nu}^m) \nabla_s \kappa_\gamma^{m+1}, \nabla_s \kappa_\gamma^{m+1} \rangle_{\Gamma^m} \end{cases} \leq |\Gamma^m|_\gamma, \quad (113)$$

其中沿用式 (98) 的记号。

证明 仿照定理 77 的证明, 在式 (111a) 中取 $\chi = \kappa_\gamma^{m+1} \in V(\Gamma^m)$, 在式 (111b) 中取 $\vec{\eta} = \frac{1}{\Delta t_m} (\vec{X}^{m+1} - \vec{\mathbf{d}}|_{\Gamma^m}) \in \underline{V}(\Gamma^m)$, 再结合引理 102, 即得所求结论。□

不等式 (113) 分别是 (101) 和 (102) 的离散对应形式, 也是定理 77 与 87 的各向异性对应形式。

6.4 求解方法与离散系统

与各向同性情形相比, 矩阵组装仅稍为复杂。除 §4.3 中的矩阵之外, 定义 $M_{\Gamma^m, \beta}, A_{\Gamma^m, \beta} \in \mathbb{R}^{K \times K}$, 其元素为

$$[M_{\Gamma^m, \beta}]_{kl} = \left\langle \beta(\vec{\nu}^m) \phi_k^{\Gamma^m}, \phi_l^{\Gamma^m} \right\rangle_{\Gamma^m}^h, \quad [A_{\Gamma^m, \beta}]_{kl} = \left\langle \beta(\vec{\nu}^m) \nabla_s \phi_k^{\Gamma^m}, \nabla_s \phi_l^{\Gamma^m} \right\rangle_{\Gamma^m}.$$

此外, 给定 $\vec{\nu} \in \underline{V}_c(\Gamma^m)$, 引入 $A_{\Gamma^m, \gamma}(\vec{\nu}) \in (\mathbb{R}^{d \times d})^{K \times K}$, 其元素为

$$[A_{\Gamma^m, \gamma}(\vec{\nu})]_{kl} = \sum_{\ell=1}^L \left\langle \left[\frac{\gamma_\ell(\vec{\nu})}{\gamma(\vec{\nu})} \right]^{r-1} \gamma_\ell(\vec{\nu}^m) \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \phi_k^{\Gamma^m}, \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \phi_l^{\Gamma^m} \right\rangle_{\Gamma^m} \tilde{G}_\ell,$$

这里用到了式 (110) 和 (104)。这些矩阵的组装并不困难; 例如,

$$\left(\left\langle \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \phi_k^{\Gamma^m}, \nabla_s^{\tilde{G}_\ell} \phi_l^{\Gamma^m} \right\rangle_{\Gamma^m} \right)_{k, l=1}^K$$

的组装与式 (45) 中 A_{Γ^m} 的组装十分相似。采用 (46) 的记号, 可将 (111) 表述如下: 求 $(\delta \vec{X}^{m+1}, \kappa_\gamma^{m+1}) \in (\mathbb{R}^d)^K \times \mathbb{R}^K$, 使得

$$\begin{pmatrix} \Delta t_m \begin{pmatrix} M_{\Gamma^m, \beta} & -\vec{N}_{\Gamma^m}^\top \\ A_{\Gamma^m, \beta} & A_{\Gamma^m, \gamma}(\vec{v}^{m+1}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_\gamma^{m+1} \\ \delta \vec{X}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -A_{\Gamma^m, \gamma}(\vec{v}^{m+1}) \vec{X}^m \end{pmatrix}, \quad (114)$$

其中使用了记号 $\vec{v}^{m+1} = \vec{v}^{m+1} \circ \vec{X}^{m+1}$, 并回顾 $\delta \vec{X}^{m+1}$ 是 $\vec{X}^{m+1} - \text{id}|_{\Gamma^m} \in V(\Gamma^m)$ 关于标准基的系数向量。

若 γ 具有 (106) 的形式且 $r = 1$, 则方程组 (114) 不依赖于 $\vec{v}^{m+1}$, 因而是线性的。因此, 可仿照 (46) 求解: 或使用稀疏直接求解器, 或采用 Schur 补方法及预条件共轭梯度求解器。详见 Barrett et al. (2008a, §4)。

另一方面, 若 $r > 1$, 则非线性方程组 (114) 可用滞后的不动点型迭代求解。每一步迭代均求解形如 (114) 的线性方程组, 其中将 $\vec{v}^{m+1}$ 替换为给定量 $\vec{v}^{m+1, i}$ 。实际计算中, 这种迭代总能收敛; 进一步的细节见 Barrett et al. (2008a, §4)。

6.5 半离散格式的体积守恒性

对于 (111) 的时间连续半离散版本, 容易证明定理 79(i) 及 88(i) 的各向异性对应结论; 在各向异性表面扩散情形下, 定理 88(ii) 的对应结论亦成立。

注记 104 (切向运动) 在各向异性情形下, (111b) 的半离散对应形式所诱导的切向运动, 不再使曲面满足定义 60。特别地, 定理 79(ii) 一般不成立。平面情形下, 若 γ 具有 (106) 的形式, 且 $L = 1$ 、 $r = 1$, 则可以证明关于 γ 的等分布性质, 见 Barrett et al. (2008c, 注记 2.7)。不过, 对任何形如 (106) 的 γ , 无论 $d = 2$ 还是 $d = 3$, 全离散格式 (111) 在实际计算中均给出质量良好的网格, 未出现可能使格式失效的网格节点聚并。例如, 可参看 Barrett et al. (2008a, §5) 中的数值模拟。

6.6 其他数值方法

在 $d = 2$ 的情形下, Dziuk (1999a) 提出了各向异性平均曲率流的数值格式; 在所逼近的解充分光滑的假设下, 还给出了时间连续半离散版本的误差估计。

同样在 $d = 2$ 的情形下, Barrett et al. (2011) 考察了各向异性演化方程的全隐式全离散格式, 其形式与 (63) 类似。

将本章方法推广到曲面簇及带边曲面的各向异性演化律, 见 Barrett et al. (2008c, 2010a,d)。

关于高余维各向异性曲率驱动流的参数方法, 见 Pozzi (2007, 2008); Barrett et al. (2010b)。

Deckelnick and Dziuk (1999) 还研究了各向异性平均曲率流的图像表述, 在解充分光滑的假设下, 对连续分片线性半离散有限元逼近进行了误差分析。关于各向异性表面扩散图像表述的全离散有限元逼近及相应误差分析, 见 Deckelnick et al. (2005b)。

关于水平集法和相场法对各向异性平均曲率流的逼近, 亦见 Deckelnick et al. (2005a)。前者的相关工作有 Clarenz et al. (2005); Burger et al. (2007); 后者见 Caginalp and Lin (1987); Garcke et al. (1999); Beneš (2003); Gräser et al. (2013), 以及本文作者在 Barrett et al. (2013b, 2014b) 中关于各向异性平均曲率流和各向异性表面扩散的稳定逼近工作。

最后, 对于强各向异性表面能, 一些作者引入了曲率能量正则化, 由此得到与 Willmore 流相似的高阶流, 见 Burger (2005); Haußer and Voigt (2005); Torabi et al. (2009)。

第七章

体区域方程与曲面几何方程的耦合及其在晶体生长中的应用

现在考虑曲率驱动的界面演化如何涉及定义在界面周围体区域中的量。

7.1 Mullins–Sekerka 问题

先从界面几何方程与体区域方程耦合的一个最简单的问题入手。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, 是具有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的区域, 并由一个界面分为两个不同的相。假设在每一时刻 t , 该界面均为闭 C^2 超曲面 $\Gamma(t) \subset \Omega$ 。采用 §2.4 的记号, 回顾图 1, 假设两相分别占据区域 $\Omega_-(t)$ 和 $\Omega_+(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_-(t)}$, 其中 $\Gamma(t) = \partial\Omega_-(t)$, 并以 $\vec{\nu}$ 表示 $\Omega_-(t)$ 在 $\Gamma(t)$ 上的外单位法向量。Mullins–Sekerka 问题如下: 给定 $\Gamma(0)$, 求 $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 及演化界面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$, 使得对所有 $t \in (0, T]$ 有

$$-\Delta u = 0 \quad \text{于 } \Omega_-(t), \quad -\Delta u = 0 \quad \text{于 } \Omega_+(t), \quad (115a)$$

$$u = \kappa \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad [\partial_{\vec{\nu}} u]_-^+ = -\mathcal{V} \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (115b)$$

$$\partial_{\vec{\nu}_\Omega} u = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega, \quad (115c)$$

其中采用了记号 (13), $\vec{\nu}_\Omega$ 是 Ω 在 $\partial\Omega$ 上的外单位法向量。

7.1.1 Mullins–Sekerka 问题的弱形式 Mullins–Sekerka 问题的有限元逼近需要适当的弱形式, 现将其给出。给定闭超曲面 $\Gamma(0) \subset \Omega$, 求将 Ω 分为 $\Omega_-(t)$ 和 $\Omega_+(t)$ 、具有整体参数化及其诱导速度场 $\vec{\mathcal{V}}$ 的演化超曲面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$, 以及 $\varkappa \in L^2(\mathcal{G}_T)$ 和 $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, 使之满足: 对几乎所有 $t \in (0, T)$, 求 $(u(\cdot, t), \vec{\mathcal{V}}(\cdot, t), \varkappa(\cdot, t)) \in H^1(\Omega) \times [L^2(\Gamma(t))]^d \times L^2(\Gamma(t))$ 使得

$$(\nabla u, \nabla \phi) = \langle \vec{\mathcal{V}}, \phi \vec{\nu} \rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \phi \in H^1(\Omega), \quad (116a)$$

$$\langle u, \chi \rangle_{\Gamma(t)} = \langle \varkappa, \chi \rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \chi \in L^2(\Gamma(t)), \quad (116b)$$

$$\langle \varkappa \vec{\nu}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} + \langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d. \quad (116c)$$

这里 $(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ 是 Ω 上的 L^2 内积。容易证明, (116) 的足够光滑的解也满足 (115)。为此, 由 (116a) 及注记 36, 利用稠密性论证, 得到

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{V}, \phi \rangle_{\Gamma(t)} &= \langle \vec{\mathcal{V}}, \phi \vec{\nu} \rangle_{\Gamma(t)} = (\nabla u, \nabla \phi) \\ &= - \int_{\Omega_-(t) \cup \Omega_+(t)} \phi \Delta u \, d\mathcal{L}^d + \langle \partial_{\vec{\nu}_\Omega} u, \phi \rangle_{\partial\Omega} - \langle [\partial_{\vec{\nu}} u]_-^+, \phi \rangle_{\Gamma(t)} \\ &\quad \forall \phi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (117)$$

由变分法基本引理及 (117), 便得 (115a)、(115c) 以及 (115b) 的第二个条件。类似地, 由 (116b) 及 (116c), 结合注记 22(iv), 可知 (115b) 的第一个条件也成立。

注记 105 对于 (116) 的足够光滑的弱解, 可在形式上证明如下结论。

- (i) Mullins–Sekerka 问题使界面面积下降。由输运定理 (定理 32), 并在 (116b) 中取 $\chi = \mathcal{V}$, 在 (116a) 中取 $\phi = u$, 得到

$$\frac{d}{dt} |\Gamma(t)| = - \langle \varkappa, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} = - \langle u, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} = - \langle \vec{\mathcal{V}}, u \vec{\nu} \rangle_{\Gamma(t)} = - |\nabla u|_\Omega^2 \leq 0.$$

- (ii) Mullins–Sekerka 问题保持体积 $\mathcal{L}^d(\Omega_-(t))$, 从而也保持 $\mathcal{L}^d(\Omega_+(t))$ 。这是因为, 由输运定理 (定理 33) 得

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^d(\Omega_-(t)) = \langle \mathcal{V}, 1 \rangle_{\Gamma(t)} = \langle \vec{\mathcal{V}}, \vec{\nu} \rangle_{\Gamma(t)} = (\nabla u, \nabla 1) = 0,$$

其中在 (116a) 中取了 $\phi = 1$ 。

注记 106 给定超曲面 $\Gamma(t) \subset \Omega$, 其法向量 $\vec{\nu}(t)$ 及曲率 $\varkappa(t)$ 也随之确定。求解 (115a)、

(115c) 及 (115b) 的第一个方程, 便可得到依赖于 $\varkappa(t)$ 的体区域函数 $u(t)$ 。现在定义

$$\mathfrak{F}(\varkappa) = -[\partial_{\bar{\nu}} u]_{-}^{+},$$

则有

$$\langle \mathfrak{F}(\varkappa), \varkappa \rangle_{\Gamma(t)} = - \left\langle [\partial_{\bar{\nu}} u]_{-}^{+}, \varkappa \right\rangle_{\Gamma(t)} = - \left\langle [\partial_{\bar{\nu}} u]_{-}^{+}, u \right\rangle_{\Gamma(t)} = |\nabla u|_{\Omega}^2 \geq 0,$$

这里用到了 (115b) 的第一个方程, 以及在 (117) 中取 $\phi = u$, 并注意 (115a) 和 (115c)。因此, Mullins–Sekerka 问题 (115) 可写成一般形式 (81), 且满足 (82)。

7.1.2 Mullins–Sekerka 问题的非拟合有限元逼近 除了离散演化超曲面, 还须离散区域 Ω 。为简便起见, 假设 Ω 是多面体区域。不过, 采用适当的边界逼近, 也可推广到弯曲边界区域 Ω , 见 Ciarlet (1978)。对于所有 $m \geq 0$, 设 $\mathcal{T}^m$ 是将 Ω 分成互不相交的开单形的规则剖分, 使得 $\bar{\Omega} = \cup_{o \in \mathcal{T}^m} \bar{o}$; 规则剖分的定义及有限元的更多细节见 Ciarlet (1978)。注意, 这里允许体区域的三角剖分随时间变化。与 $\mathcal{T}^m$ 对应的有限元空间为

$$S^m = \{ \chi \in C(\bar{\Omega}) : \chi|_o \text{ 为仿射的 } \forall o \in \mathcal{T}^m \} \subset H^1(\Omega). \quad (118)$$

设 K_{S^m} 是 $\mathcal{T}^m$ 的节点数, $\{p_k^m\}_{k=1}^{K_{S^m}}$ 是这些节点的坐标。以 $\{\phi_k^{S^m}\}_{k=1}^{K_{S^m}}$ 表示 S^m 的标准基函数。引入插值算子 $I^m : C(\bar{\Omega}) \rightarrow S^m$, 使得对 $k = 1, \dots, K_{S^m}$ 有 $(I^m \eta)(p_k^m) = \eta(p_k^m)$ 。于是, $C(\bar{\Omega})$ 上的离散半内积定义为

$$(\eta_1, \eta_2)_m^h = (I^m[\eta_1 \eta_2], 1) \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in C(\bar{\Omega}),$$

相应的半范数为 $|\eta|_{\Omega, m} = [(\eta, \eta)_m^h]^{\frac{1}{2}}$ 其中 $\eta \in C(\bar{\Omega})$ 。

现在可以基于弱形式 (116), 给出 Barrett et al. (2010c) 中 Mullins–Sekerka 问题的有限元逼近。设闭多面体超曲面 Γ^0 是 $\Gamma(0)$ 的逼近, 并回顾时间区间剖分 (40)。对 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $(U^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in S^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 使得

$$(\nabla U^{m+1}, \nabla \varphi) = \left\langle \pi_{\Gamma^m} \left[\frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m} \cdot \vec{\omega}^m \right], \varphi \right\rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \varphi \in S^m, \quad (119a)$$

$$\langle \kappa^{m+1}, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h = \langle U^{m+1}, \chi \rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (119b)$$

$$\langle \kappa^{m+1} \bar{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (119c)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 。这里用到了 (17)。

注记 107 (实现) 逼近 (119) 称为非拟合逼近, 因为曲面网格与体网格完全独立, 并不拟合于体网格; 确切地说, 曲面网格并非由体网格的面组成, 见 Barrett and Elliott

(1982)。因此, 计算 (119a) 和 (119b) 的右端时, 须采用特殊的求积规则。其中最具挑战的是计算任意单元 $\sigma^m \subset \Gamma^m$ 与体网格单元 $o^m \in \mathcal{T}^m$ 的交集 $\sigma^m \cap o^m$ 。Barrett et al. (2010c, 第 6284 页) 给出了计算这些交集的算法, 另见 Barrett et al. (2010c) 中的图 4、5。

在陈述下一个结论之前, 需要对体网格与曲面网格的相容性作一假设。

假设 108 设 Γ^m 和 $\mathcal{T}^m$ 满足

$$\dim \left\{ \int_{\Gamma^m} \varphi \vec{\omega}^m d\mathcal{H}^{d-1} : \varphi \in S^m \right\} = d.$$

定理 109 设 Γ^m 和 $\mathcal{T}^m$ 满足假设 108。则 (119) 存在唯一解 $(U^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in S^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 。此外, 若 $d = 2$ 或 $d = 3$, 则 (119) 的解满足稳定性估计

$$|\Gamma^{m+1}| + \Delta t_m |\nabla U^{m+1}|_{\Omega}^2 \leq |\Gamma^m|.$$

证明 存在性由唯一性推出, 故考虑如下齐次线性方程组: 求 $(U, \vec{X}, \kappa) \in S^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 使得

$$\Delta t_m (\nabla U, \nabla \varphi) - \left\langle \pi_{\Gamma^m} [\vec{X} \cdot \vec{\omega}^m], \varphi \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \varphi \in S^m, \quad (120a)$$

$$\langle \kappa, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h - \langle U, \chi \rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (120b)$$

$$\langle \kappa \vec{\omega}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m), \quad (120c)$$

其中 (120c) 用到了 (19)。在 (120a) 中取 $\varphi = U$, 在 (120b) 中取 $\chi = \pi_{\Gamma^m} [\vec{X} \cdot \vec{\omega}^m]$, 在 (120c) 中取 $\vec{\eta} = \vec{X}$, 得到

$$\Delta t_m |\nabla U|_{\Omega}^2 + \left| \nabla_s \vec{X} \right|_{\Gamma^m}^2 = 0.$$

因此, U 在 Ω 中为常数, 且 $\vec{X}$ 在 Γ^m 上为常数。由 (120a) 及假设 108 得 $\vec{X} = \vec{0}$ 。此外, 由 (120b) 可知 $\kappa = U$ 在 Γ^m 上为常数。因此, 可按定理 86 的证明得到 $\kappa = U = 0$, 从而得到唯一性。

余下只须证明稳定性界。在 (119a) 中取 $\varphi = U^{m+1}$, 在 (119b) 中取 $\chi = \pi_{\Gamma^m} [(\vec{X}^{m+1} - \text{id}) \cdot \vec{\omega}^m]$, 在 (119c) 中取 $\vec{\eta} = \vec{X}^{m+1} - \text{id}|_{\Gamma^m}$, 得到

$$\Delta t_m |\nabla U^{m+1}|_{\Omega}^2 + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s (\vec{X}^{m+1} - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma^m} = 0.$$

由引理 57 即得所证。 □

注记 110 (半离散格式) 上述稳定性界是注记 105(i) 的离散对应形式。不过, 全离散格式 (119) 一般不满足体积守恒性质注记 105(ii) 的精确离散对应形式。原因是在 (119a) 中取 $\varphi = 1$, 只能得到

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \pi_{\Gamma^m} \left[\left(\vec{X}^{m+1} - \text{id} \right) \cdot \vec{\omega}^m \right], 1 \right\rangle_{\Gamma^m} = \left\langle \vec{X}^{m+1} - \text{id}, \vec{\omega}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h \\ &= \left\langle \vec{X}^{m+1} - \text{id}, \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h = \left\langle \vec{X}^{m+1} - \text{id}, \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}, \end{aligned} \quad (121)$$

这里用到了 (19) 及 (20)。一般而言, (121) 中的项并不等于离散体积变化 $\mathcal{L}^d(\Omega^{m+1}) - \mathcal{L}^d(\Omega^m)$ 其中 Ω^m 表示 Γ^m 的内部。不过, 回顾注记 89(ii), 对于格式 (119) 的半离散版本, 可以证明注记 105(ii) 的精确离散对应结论。此外, 该半离散格式还满足定理 88(iii) 的网格性质。

注记 111 (离散线性方程组) 回顾 §4.3 中的记号, (119) 在每个时间层所求解的线性方程组可表为: 求 $(U^{m+1}, \kappa^{m+1}, \delta \vec{X}^{m+1}) \in \mathbb{R}^{K_{S^m}} \times \mathbb{R}^K \times (\mathbb{R}^d)^K$ 使得

$$\begin{pmatrix} A_\Omega & 0 & -\frac{1}{\Delta t_m} \vec{N}_{\Omega, \Gamma^m}^\top \\ -M_{\Gamma^m, \Omega} & M_{\Gamma^m} & 0 \\ 0 & \vec{N}_{\Gamma^m} & A_{\Gamma^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{m+1} \\ \kappa^{m+1} \\ \delta \vec{X}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -A_{\Gamma^m} \vec{X}^m \end{pmatrix}, \quad (122)$$

这里采用了与 (46) 类似的记号混用。(122) 中各矩阵的定义, 或见 (45), 或直接由 (119) 得到; 详见 Barrett et al. (2010c, §4.1)。实际计算中, 线性方程组 (122) 既可用 UMFPACK 等稀疏直接求解方法求解 (见 Davis (2004)), 也可先作 Schur 补, 再用 (预条件) 共轭梯度法求解。更多细节仍参阅 Barrett et al. (2010c, §4.1)。

7.2 带 (动力学) Gibbs–Thomson 律的 Stefan 问题

一般而言, 与上述 Mullins–Sekerka 模型相比, 晶体生长现象涉及更复杂的模型。完整模型是带 Gibbs–Thomson 律及动力学过冷的 Stefan 问题, 并考虑各向异性表面能 (98)。采用与 (115) 相同的记号与约定, 模型如下。

给定 $\Gamma(0)$, 并在 $\vartheta > 0$ 时给定 $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 求 $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 及演化界面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$, 使得 $\vartheta u(\cdot, 0) = \vartheta u_0$, 并对所有 $t \in (0, T]$ 有

$$\vartheta \partial_t u - \mathcal{K}_- \Delta u = f \quad \text{于 } \Omega_-(t), \quad \vartheta \partial_t u - \mathcal{K}_+ \Delta u = f \quad \text{于 } \Omega_+(t), \quad (123a)$$

$$\frac{\rho \mathcal{V}}{\beta(\vec{\nu})} = \alpha \kappa_\gamma - a u \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad [\mathcal{K} \partial_{\vec{\nu}} u]_-^+ = -\lambda \mathcal{V} \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (123b)$$

$$\partial_{\vec{\nu}_\Omega} u = 0 \quad \text{在 } \partial_N \Omega, \quad u = u_D \quad \text{在 } \partial_D \Omega, \quad (123c)$$

其中 $[\mathcal{K} \partial_{\vec{\nu}} u]^{\pm}$ 的定义与 (13) 类似, 且 $\partial\Omega = \overline{\partial_N \Omega} \cup \overline{\partial_D \Omega}$, 其中 $\partial_N \Omega \cap \partial_D \Omega = \emptyset$ 。在上述方程组中, u 表示相对于平面界面熔点的温度偏差, f 描述热源, $\vartheta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是体积热容, $\mathcal{K}(\cdot, t) = \mathcal{K}_+ \mathcal{X}_{\Omega_+(t)} + \mathcal{K}_- \mathcal{X}_{\Omega_-(t)}$ (其中 $\mathcal{K}_{\pm} \in \mathbb{R}_{>0}$) 是依赖于相的热导率, 回顾 (11)。此外, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 是单位体积的潜热, $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ 是单位面积的界面能密度, $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是动力学系数, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ 是量纲为熵除以体积的系数。又如 §6.1, $\beta: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 是无量纲的迁移率函数, 用于描述迁移率对界面局部取向的依赖。显然, 取 $\vartheta = \rho = 0$, $\mathcal{K} = a = \alpha = \lambda = 1$ 及 $\partial\Omega = \partial_N \Omega$ 时, (123) 在各向同性情形退化为 (115)。

为陈述 (123) 的弱形式, 引入函数空间

$$S_0 = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ 在 } \partial_D \Omega\} \text{ 和 } S_D = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = u_D \text{ 在 } \partial_D \Omega\}, \quad (124)$$

为简便起见, 此后假设 $u_D \in \mathbb{R}$, 且在 $\partial_N \Omega = \partial\Omega$ 情形有 $u_D = 0$ 。对于形如 (106) 的各向异性表面能密度, 将 Mullins–Sekerka 问题的弱形式 (116) 如下推广, 即得到 (123) 的弱形式。

给定闭超曲面 $\Gamma(0) \subset \Omega$, 并在 $\vartheta > 0$ 时给定 $u_0 \in L^2(\Omega)$, 求将 Ω 分为 $\Omega_-(t)$ 和 $\Omega_+(t)$ 、具有整体参数化及其诱导速度场 $\vec{\mathcal{V}}$ 的演化超曲面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$, 以及 $\varkappa \in L^2(\mathcal{G}_T)$ 和满足 $\vartheta u(\cdot, 0) = \vartheta u_0$ 的 $u \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$, 使之满足: 对几乎所有 $t \in (0, T)$, 求

$$(u(\cdot, t), \vec{\mathcal{V}}(\cdot, t), \varkappa(\cdot, t)) \in S_D \times [L^2(\Gamma(t))]^d \times L^2(\Gamma(t)) \text{ 使得}$$

$$\vartheta (\partial_t u, \phi) + (\mathcal{K} \nabla u, \nabla \phi) - (f, \phi) = \lambda \left\langle \vec{\mathcal{V}}, \phi \vec{\nu} \right\rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \phi \in S_0, \quad (125a)$$

$$\rho \left\langle \frac{\vec{\mathcal{V}}}{\beta(\vec{\nu})}, \chi \vec{\nu} \right\rangle_{\Gamma(t)} = \langle \alpha \varkappa_{\gamma} - a u, \chi \rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \chi \in L^2(\Gamma(t)), \quad (125b)$$

$$\langle \varkappa_{\gamma} \vec{\nu}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \nabla_s^{\tilde{G}} \text{id}, \nabla_s^{\tilde{G}} \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma(t), \gamma} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d, \quad (125c)$$

其中采用了记号 (110)。

对于 (125) 的足够光滑的解, 可以在形式上建立如下先验界。在 (125a) 中取 $\phi = u - u_D$, 在 (125b) 中取 $\chi = \frac{\lambda}{a} \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\nu}$, 在 (125c) 中取 $\vec{\eta} = \frac{\alpha \lambda}{a} \vec{\mathcal{V}}$, 由输运定理 (定理 33) 及引理 97 得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\vartheta}{2} |u - u_D|_{\Omega}^2 + \frac{\alpha \lambda}{a} |\Gamma(t)|_{\gamma} + \lambda u_D \mathcal{L}^d(\Omega_-(t)) \right) \\ & + (\mathcal{K} \nabla u, \nabla u) + \frac{\lambda \rho}{a} \langle \beta(\vec{\nu}), \mathcal{V}^2 \rangle_{\Gamma(t)} = (f, u - u_D). \end{aligned} \quad (126)$$

现在引入 S_0 和 S_D 的有限元逼近。回顾 (118) 及 (124), 置

$$S_0^m = S^m \cap S_0 \quad \text{和} \quad S_D^m = S^m \cap S_D. \quad (127)$$

结合第 4 节关于平均曲率流、第 6 节关于各向异性流以及上文关于 Mullins–Sekerka 问题的思想, Barrett et al. (2010c) 中 (125) 的有限元逼近如下。设闭多面体超曲面 Γ^0 是 $\Gamma(0)$ 的逼近; 若 $\vartheta > 0$, 则设 $U^0 \in S_D^0$ 是 u_0 的逼近, 例如在 $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ 时取 $U^0 = I^0 u_0$ 。对 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $(U^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa_\gamma^{m+1}) \in S_D^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 使得

$$\begin{aligned} \vartheta \left(\frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t_m}, \varphi \right)_m^h + (\mathcal{K} \nabla U^{m+1}, \nabla \varphi) - \lambda \left\langle \pi_{\Gamma^m} \left[\frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m} \cdot \vec{\omega}^m \right], \varphi \right\rangle_{\Gamma^m} \\ = (f^{m+1}, \varphi)_m^h \quad \forall \varphi \in S_0^m, \end{aligned} \quad (128a)$$

$$\begin{aligned} \rho \left\langle [\beta(\vec{\nu}^m)]^{-1} \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m}, \chi \vec{\omega}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \alpha \langle \kappa_\gamma^{m+1}, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h + a \langle U^{m+1}, \chi \rangle_{\Gamma^m} = 0 \\ \forall \chi \in V(\Gamma^m), \end{aligned} \quad (128b)$$

$$\langle \kappa_\gamma^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s^{\vec{G}} \vec{X}^{m+1}, \nabla_s^{\vec{G}} \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m, \gamma} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (128c)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 。这里引入了 $f^{m+1} = f(\cdot, t_{m+1})$, 并为方便起见, 假设对所有 $t \in [0, T]$ 有 $f(\cdot, t) \in C(\bar{\Omega})$ 。此外, 回顾 (17), 并注意: 为证明 (128) 的存在性、唯一性及稳定性结论, 必须在 (128b) 中使用 $\vec{\omega}^m$ 而非 $\vec{\nu}^m$; 见下文定理 113 的证明。

注记 112 (实现) 与注记 107 中对 (119) 所述的计算困难相比, (128) 中唯一新增的困难是项 $(\mathcal{K} \nabla U^{m+1}, \nabla \varphi)$ 。为在 $\mathcal{K}_+ \neq \mathcal{K}_-$ 情形计算此项, 须对每个 $o \in \mathcal{T}^m$ 计算 $\mathcal{L}^d(o \cap \Omega^m)$, 其中 Ω^m 表示 Γ^m 的内部。这可以按 Barrett et al. (2013a, 注 4.2) 中所述完成, 但由于有限元逼近采用非拟合方式, 计算代价较高。另一种途径是引入积分 $(\mathcal{K} \nabla U^{m+1}, \nabla \varphi)$ 的适当数值逼近, 与下文 §7.3 及第 8 节中的处理类似。对于 (123a) 中依赖于相的外力项 $f_\pm$, 也可类似处理: 在 (128a) 中引入 $(f^{m+1}, \varphi)_m^h$ 的适当对应形式。

对 $U \in C(\bar{\Omega})$ 和 $\vec{X} \in \underline{V}(\Gamma^m)$ 定义

$$\mathcal{E}^m(U, \vec{X}) = \frac{\vartheta}{2} |U - u_D|_{\Omega, m}^2 + \frac{\alpha \lambda}{a} |\vec{X}(\Gamma^m)|_\gamma$$

, 有如下结论。

定理 113 设 Γ^m 和 $\mathcal{T}^m$ 满足假设 64(ii) 及假设 108, 并设 $U^m \in C(\bar{\Omega})$ 。设 γ 具有 (106) 的形式, 其中 $r = 1$ 。则 (128) 存在唯一解 $(U^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa_\gamma^{m+1}) \in S_D^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 。此外, 若 $d = 2$ 或 $d = 3$, 且 γ 具有 (106) 的形式, 其中 $r \in [1, \infty)$, 则 (128) 的解满足

$$\mathcal{E}^m(U^{m+1}, \vec{X}^{m+1}) + \lambda u_D \left\langle \vec{X}^{m+1} - \text{id}, \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m} + \frac{\vartheta}{2} |U^{m+1} - U^m|_{\Omega, m}^2$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta t_m (\mathcal{K} \nabla U^{m+1}, \nabla U^{m+1}) + \Delta t_m \frac{\lambda \rho}{a} \left(\left| [\beta(\vec{\nu}^m)]^{-\frac{1}{2}} \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m} \cdot \vec{\omega}^m \right|_{\Gamma^m}^h \right)^2 \\
& \leq \mathcal{E}^m(U^m, \vec{\text{id}}) + \Delta t_m (f^{m+1}, U^{m+1} - u_D)_m^h. \quad (129)
\end{aligned}$$

证明 对于 $r = 1$, 存在唯一性的证明与定理 109 的证明类似。具体而言, 若 $(U, \vec{X}, \kappa_\gamma) \in S_0^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 是 (128) 的齐次对应方程组 (类似于 (120)) 的一个解, 则取 $\varphi = U$ 、 $\chi = \frac{\lambda}{a} \pi_{\Gamma^m} [\vec{X} \cdot \vec{\omega}^m]$ 及 $\vec{\eta} = \frac{\alpha \lambda}{a} \vec{X}$, 得到

$$\begin{aligned}
& \vartheta |U|_{\Omega, m}^2 + \Delta t_m (\mathcal{K} \nabla U, \nabla U) + \frac{\lambda \rho}{\Delta t_m a} \left(\left| [\beta(\vec{\nu}^m)]^{-\frac{1}{2}} \vec{X} \cdot \vec{\omega}^m \right|_{\Gamma^m}^h \right)^2 \\
& + \frac{\alpha \lambda}{a} \left\langle \nabla_s^{\tilde{G}} \vec{X}, \nabla_s^{\tilde{G}} \vec{X} \right\rangle_{\Gamma^m, \gamma} = 0,
\end{aligned}$$

由于所有相关物理参数均非负, 且 $\mathcal{K}$ 、 α 、 a 及 λ 为正, 故 U 在 Ω 中为常数; 若 $\vartheta > 0$ 或 $S_0^m \neq S^m$, 则 $U = 0$; 此外, $\vec{X}$ 在 Γ^m 上为常数。与定理 109 的证明相同, 由假设 108 可推出 $\vec{X} = \vec{0}$ 。这意味着 $\kappa_\gamma = \frac{a}{\alpha} U$ 在 Γ^m 上为常数, 从而可按定理 109 的证明得到 $\kappa_\gamma = U = 0$ 。综上, (128) 存在唯一解 $(U^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa_\gamma^{m+1}) \in S_D^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 。

余下只须建立 (129)。在 (128a) 中取 $\varphi = U^{m+1} - u_D$, 在 (128b) 中取 $\chi = \frac{\lambda}{a} \pi_{\Gamma^m} [(\vec{X}^{m+1} - \text{id}_{|\Gamma^m}) \cdot \vec{\omega}^m]$, 在 (128c) 中取 $\vec{\eta} = \frac{\alpha \lambda}{a} (\vec{X}^{m+1} - \text{id}_{|\Gamma^m})$, 得到

$$\begin{aligned}
& \vartheta (U^{m+1} - U^m, U^{m+1} - u_D)_m^h + \Delta t_m (\mathcal{K} \nabla U^{m+1}, \nabla U^{m+1}) \\
& + \frac{\alpha \lambda}{a} \left\langle \nabla_s^{\tilde{G}} \vec{X}^{m+1}, \nabla_s^{\tilde{G}} (\vec{X}^{m+1} - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma^m, \gamma} \\
& + \Delta t_m \frac{\lambda \rho}{a} \left(\left| [\beta(\vec{\nu}^m)]^{-\frac{1}{2}} \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m} \cdot \vec{\omega}^m \right|_{\Gamma^m}^h \right)^2 \\
& = -\lambda u_D \left\langle \vec{X}^{m+1} - \text{id}, \vec{\omega}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h + \Delta t_m (f^{m+1}, U^{m+1} - u_D)_m^h
\end{aligned}$$

由引理 102 及 (20) 立即得到 (129)。□

注记 114 (半离散格式) (129) 很好地再现了相应的连续能量律 (126)。至于它为何并非 (126) 的精确离散对应形式, 已在注记 110 中说明。不过, 回顾注记 89(ii), 对于格式 (128) 的半离散版本, 可以证明 (126) 的精确离散对应结论; 另见 Barrett et al. (2010c, 注 3.5)。此外, 该半离散格式还具有注记 104 中所述的切向运动。

注记 115 (离散方程组) 结合注记 111 及 §6.4 中的方法, 即可导出 (128) 在每个时间层所须求解的离散方程组。若 γ 具有 (106) 的形式, 其中 $r = 1$, 则这些方程组是线性的, 可按注记 111 中的方法求解, 即采用稀疏直接求解器, 或结合 Schur 补与预条件共轭梯度法。若 $r > 1$, 则这些方程组是非线性的, 可用滞后型不动点迭代求解。更多

细节参阅 [Barrett et al. \(2010c, §4\)](#)。

7.3 单侧自由边界问题

本节考虑扩散仅发生在一相中的情形，即研究 Mullins–Sekerka 问题或 Stefan 问题的单侧版本。例如，在雪晶生长中，扩散可以限制在气相中，这类问题因而具有实际意义。在此情形，只在一个相中求未知量 u ；该相在时刻 t 占据区域 $\Omega_+(t)$ 。仍为叙述简便起见，始终假设区域 $\Omega_-(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_+(t)}$ 紧含于 Ω 。问题表述如下。给定 $\Gamma(0)$ ，并在 $\vartheta > 0$ 时给定 $u_0 : \Omega_+(0) \rightarrow \mathbb{R}$ ，求演化界面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ 及 $u(\cdot, t) : \Omega_+(t) \rightarrow \mathbb{R}$ ， $t \in [0, T]$ ，使得 $\vartheta u(\cdot, 0) = \vartheta u_0(\cdot)$ ，并对所有 $t \in (0, T]$ 有

$$\vartheta \partial_t u - \mathcal{K}_+ \Delta u = f \quad \text{于 } \Omega_+(t), \quad u = u_D \quad \text{在 } \partial\Omega, \quad (130a)$$

$$\frac{\rho \mathcal{V}}{\beta(\vec{\nu})} = \alpha \kappa_\gamma - a u \quad \text{和} \quad \mathcal{K}_+ \partial_{\vec{\nu}} u = -\lambda \mathcal{V} \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (130b)$$

给定数据所满足的条件与 (123) 相同。对于雪晶生长， $-u$ 是适当标度后的浓度， $-u_D$ 是标度后的过饱和度；见 [Libbrecht \(2005\)](#)；[Barrett et al. \(2012a, 2013a\)](#)。

为建立雪晶生长模型，现给出与之相关的六角对称表面能。设 $d = 3$ ，并对 $\varepsilon > 0$ 置 $l_\varepsilon(\vec{p}) = [\varepsilon^2 |\vec{p}|^2 + p_1^2 (1 - \varepsilon^2)]^{\frac{1}{2}}$ 。引入旋转矩阵

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

再置

$$\gamma(\vec{p}) = l_\varepsilon(R_2(\frac{\pi}{2})\vec{p}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\ell=1}^3 l_\varepsilon(R_1(\theta_0 + \frac{\ell\pi}{3})\vec{p}),$$

其中 $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{3})$ 在 $x_1 - x_2$ 平面内旋转各向异性。由此定义了具有 (106) 形式的密度，其中 $r = 1$ 及 $L = 4$ 。该密度逼近一个晶体表面能密度，其 Wulff 形状是正六棱柱，且 Wulff 形状的每个面到原点的距离相同。

回顾 [Barrett et al. \(2013a\)](#) 中对上述单侧问题的非拟合有限元逼近，它沿用了 [Barrett and Elliott \(1982\)](#) 的思想。给定界面的一个逼近 Γ^m ，以 Ω_+^m 表示 Γ^m 的外部，以 Ω_-^m 表示 Γ^m 的内部，使得 $\Gamma^m = \partial\Omega_-^m = \overline{\Omega_-^m} \cap \overline{\Omega_+^m}$ 。现引入适当的离散试探函数空间及检验函数空间。为此，设 $\Omega_+^{m,h}$ 是 Ω_+^m 的逼近，并置 $\Omega_-^{m,h} = \Omega \setminus \overline{\Omega_+^{m,h}}$ 。须强调， $\Omega_+^{m,h}$ 不必是 $\mathcal{T}^m$ 中若干单元的并。回顾 (118) 及 (127)，定义有限元空间

$$\begin{aligned} S_+^m &= \left\{ \chi \in S^m : \chi(\vec{p}_k^m) = 0 \text{ 若 } \text{supp } \phi_k^{S^m} \subset \overline{\Omega_-^{m,h}}, k = 1, \dots, K_{S^m} \right\}, \\ S_{0,+}^m &= S_0^m \cap S_+^m, \quad S_{D,+}^m = S_D^m \cap S_+^m. \end{aligned} \quad (131)$$

(130) 的有限元逼近如下。设闭多面体超曲面 Γ^0 是 $\Gamma(0)$ 的逼近；若 $\vartheta > 0$ ，则设 $U^0 \in S_D^0$ 是 u_0 的逼近，例如当 $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ 是给定的 $u_0 \in C(\bar{\Omega}_+(0))$ 的一个延拓时，取 $U^0 = I^0 u_0$ 。对 $m = 0, \dots, M-1$ ，求 $(U^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa_\gamma^{m+1}) \in S_{D,+}^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 使得

$$\vartheta \left(\frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t_m}, \varphi \right)_{m,+}^h + \mathcal{K}_+ (\nabla U^{m+1}, \nabla \varphi)_{m,+} - \lambda \left\langle \pi_{\Gamma^m} \left[\frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m} \cdot \vec{\omega}^m \right], \varphi \right\rangle_{\Gamma^m} = (f^{m+1}, \varphi)_{m,+}^h \quad \forall \varphi \in S_{0,+}^m, \quad (132a)$$

$$\rho \left\langle [\beta(\vec{\nu}^m)]^{-1} \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m}, \chi \vec{\omega}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \alpha \langle \kappa_\gamma^{m+1}, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h + a \langle U^{m+1}, \chi \rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (132b)$$

$$\langle \kappa_\gamma^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s^{\tilde{G}} \vec{X}^{m+1}, \nabla_s^{\tilde{G}} \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m, \gamma} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (132c)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 。这里对所有 $\chi, \varphi \in S^m$ 定义

$$\begin{aligned} (\nabla \chi, \nabla \varphi)_{m,+} &= \int_{\Omega_+^{m,h}} \nabla \chi \cdot \nabla \varphi \, d\mathcal{L}^d \\ &= \sum_{o \in T^m} \frac{\mathcal{L}^d(o \cap \Omega_+^{m,h})}{\mathcal{L}^d(o)} \int_o \nabla \chi \cdot \nabla \varphi \, d\mathcal{L}^d \end{aligned} \quad (133)$$

并类似地定义

$$(\chi, \varphi)_{m,+}^h = \sum_{o \in T^m} \frac{\mathcal{L}^d(o \cap \Omega_+^{m,h})}{\mathcal{L}^d(o)} \int_o I^m[\chi \varphi] \, d\mathcal{L}^d.$$

由 (131) 及 (133) 立即得到

$$(\nabla \varphi, \nabla \varphi)_{m,+} > 0 \quad \forall \varphi \in S_{0,+}^m \setminus \{0\}.$$

注记 116

- (i) 当 $\vartheta > 0$ 时，逼近 (132) 只有在离散固体区域不收缩时才有意义，见 Barrett et al. (2013a, 注 3.1)。在实际计算中，这一技术性约束并不十分苛刻，因为在多数具有物理意义的应用中，固体区域都在增长。
- (ii) 在适当假设下，可以证明 (132) 在 $r = 1$ 时的存在唯一性，以及在 $r \in [1, \infty)$ 时的稳定性； $r = 1$ 情形的证明见 Barrett et al. (2013a, 定理 3.1、3.2)。注意，由引理 102，Barrett et al. (2013a, 定理 3.2) 中对 $d = 2$ 及 $d = 3$ 的稳定性证明，立即可推广到 $r > 1$ 情形。

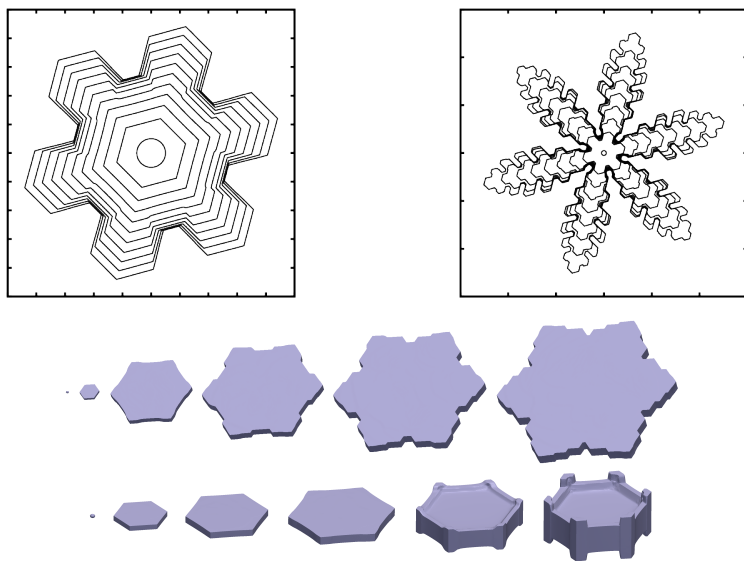


图 5: 数值实验的可视化结果: 上方为 Barrett et al. (2013a, 图 12), 中间为 Barrett et al. (2013a, 图 22), 下方为 Barrett et al. (2013a, 图 27 (左))。二维解显示在时刻 $t = 0, 0.5, \dots, 5$ (左) 及 $t = 0, 5, \dots, 40$ (右)。三维模拟的快照分别取自时刻 $t = 0, 5, 50, 100, 150, 200$ (中间) 及 $t = 0, 10, \dots, 50$ (下方)。

(iii) 与 $\mathcal{K}_+ = \mathcal{K}_-$ 时的 (128) 相比, 实现格式 (132) 所新增的主要计算困难, 是在每一时间步确定 $S_{0,+}^m$, 并计算涉及 $(\cdot, \cdot)_{m,+}$ 及 $(\cdot, \cdot)_{m,+}^h$ 的各项。显然, 困难的程度关键取决于如何选取 $\Omega_+^{m,h}$ 来逼近 Ω_+^m 。各种可选方案的详细讨论见 Barrett et al. (2013a, §4.1)。

图 5 展示了两次数值雪晶生长模拟, 采用格式 (132), 其中 γ 为六角对称表面能密度, β 为随时间变化的迁移率。

7.4 其他数值方法

采用前沿追踪型方法数值研究晶体生长的其他作者, 见 Roosen and Taylor (1991); Yokoyama (1993); Almgren (1993); Schmidt (1993, 1996, 1998); Juric and Tryggvason (1996); Bänsch and Schmidt (2000)。Sethian and Strain (1992) 研究了晶体生长的水平集方法。关于相场逼近, 参阅 Kobayashi (1993); Wheeler et al. (1993); Karma and Rappel (1998); Debierre et al. (2003); Nestler (2005), 以及作者的工作 Barrett et al. (2013b, 2014b,a)。凝固现象也可借助元胞自动机描述, 详见 Reiter (2005); Libbrecht (2008); Gravner and Griffeath (2009)。

第八章

两相流

现在讨论流体运动中的自由边界问题。设两种互不相溶的流体由一个界面分隔，界面随时间运动，其速度由流体速度决定。首先考察最简单的情形，即两相中的运动均由 Stokes 流描述。对于演化超曲面的离散，采用前文引入的参数有限元逼近。在两相流中，网格随流体速度移动，形状可能发生剧烈变化，因而良好的网格性质尤为重要。许多采用曲面网格的方法在此情形下会因网格质量恶化而遇到困难；下述方法在大多数情况下没有这一问题。此外，只须用一个简单的 XFEM 方法扩充压力空间，便可得到两个相区域的精确体积守恒。我们还将证明，全离散有限元逼近是无条件稳定的。两相流的数值逼近中常会出现非物理速度。考虑表面张力后，压力会产生跳跃间断，给数值方法带来很大困难，并可能导致非物理速度。本节讨论的 XFEM 方法通常能够避免这种所谓的伪速度。

8.1 两相 Stokes 流

本节考察由两种黏性、不可压缩且互不相溶的流体组成的系统，假定 Reynolds 数很小，从而可忽略惯性项。速度 $\vec{u}$ 和压力 p 的控制方程分别为动量方程和质量守恒方程，即

$$-\mu_{\pm} \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{于 } \Omega_{\pm}(t), \quad (134)$$

其中 $\vec{f}$ 为可能存在的外力； $\Omega_+(t)$ 和 $\Omega_-(t)$ 是两相流体在各时刻占据的区域，如 §2.4 的图 1 所示； $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 仍为固定区域，且 $d \geq 2$ 。照例，以 $\vec{\nu}$ 表示 $\Omega_-(t)$ 在 $\Gamma(t) = \partial\Omega_-(t)$ 上的单位外法向量。允许两种流体具有不同的黏度，置 $\mu(\cdot, t) = \mu_+ \chi_{\Omega_+(t)} + \mu_- \chi_{\Omega_-(t)}$ ，其中 $\mu_{\pm} \in \mathbb{R}_{>0}$ 表示两种流体的黏度，参看 (11)。下面给出界面上应满足的条件。为

此, 引入应力张量

$$\sigma = \mu (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^\top) - p \text{Id} = 2\mu D(\vec{u}) - p \text{Id}, \quad (135)$$

其中 $D(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^\top)$ 是形变率张量。利用速度的散度为零, 可将 (134) 改写为

$$-\nabla \cdot \sigma = \vec{f}, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{于 } \Omega_\pm(t).$$

在移动界面上, 要求

$$[\vec{u}]_-^+ = \vec{0}, \quad [\sigma \vec{\nu}]_-^+ = -\gamma_0 \kappa \vec{\nu}, \quad \nu = \vec{u} \cdot \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma(t),$$

其中 $\gamma_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ 表示表面张力。再给定初始数据 $\Gamma(0)$, 以及 $\partial\Omega$ 上的边界条件 $\vec{u} = \vec{0}$, 便得到封闭的方程组。整个系统可写为: 给定 $\Gamma(0)$, 求 $\vec{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d, p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 以及演化界面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$, 使得对所有 $t \in (0, T]$ 均有

$$-2\mu \nabla \cdot D(\vec{u}) + \nabla p = \vec{f}, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{于 } \Omega_\pm(t), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad \text{在 } \partial\Omega, \quad (136a)$$

$$[\vec{u}]_-^+ = \vec{0}, \quad [(2\mu D(\vec{u}) - p \text{Id}) \vec{\nu}]_-^+ = -\gamma_0 \kappa \vec{\nu}, \quad \nu = \vec{u} \cdot \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma(t). \quad (136b)$$

为构造 (136) 的有限元逼近, 需要选取适当的弱形式。此时必须就切向速度 $\vec{\mathcal{V}}_\Gamma$ 作出选择, 参看定义 25(iii); 这一选择会对离散问题产生重要影响。根据第 4 章和第 5 章的结果, 自然的做法是不显式指定 $\vec{\mathcal{V}}_\Gamma$, 而采用

$$\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\nu} = \vec{u} \cdot \vec{\nu} \quad \text{和} \quad \kappa \vec{\nu} = \Delta_s \vec{\text{id}} \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (137)$$

可与 (38) 比较。另一种做法是令 $\vec{\mathcal{V}}_\Gamma$ 由流体运动给定, 从而采用

$$\vec{\mathcal{V}} = \vec{u} \quad \text{和} \quad \kappa \vec{\nu} = \Delta_s \vec{\text{id}} \quad \text{在 } \Gamma(t),$$

可与 (67) 比较。§8.1.4 将讨论后一种做法。不过, 本文主要着眼于形式 (137), 它能使离散格式具有良好的网格性质。

首先, 将注记 36 作如下简单推广:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_-(t) \cup \Omega_+(t)} (\nabla \cdot \sigma) \cdot \vec{\xi} \, d\mathcal{L}^d \\ & = 2 \left(\mu D(\vec{u}), D(\vec{\xi}) \right) - \left(p, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) + \left\langle [\sigma \vec{\nu}]_-^+, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \vec{\xi} \in [H_0^1(\Omega)]^d, \end{aligned} \quad (138)$$

这里用到了如下事实: 对于对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, 对所有 $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 均有 $A : B = A : \frac{1}{2}(B + B^\top)$ 。由 (138), 并采用 (137), 便得到 (136) 的如下弱形式。给定闭

超曲面 $\Gamma(0) \subset \Omega$, 求将 Ω 分为 $\Omega_-(t)$ 和 $\Omega_+(t)$ 的演化超曲面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$, 以及它的整体参数化、诱导速度场 $\vec{\mathcal{V}}$ 和 $\varkappa \in L^2(\mathcal{G}_T)$, 并求 $\vec{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 与 $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对几乎处处的 $t \in (0, T)$, 所求的 $(\vec{u}(\cdot, t), p(\cdot, t), \vec{\mathcal{V}}(\cdot, t), \varkappa(\cdot, t)) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L^2(\Omega) \times [L^2(\Gamma(t))]^d \times L^2(\Gamma(t))$ 满足

$$2 \left(\mu D(\vec{u}), D(\vec{\xi}) \right) - \left(p, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) = \left(\vec{f}, \vec{\xi} \right) + \gamma_0 \left\langle \varkappa \vec{\nu}, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \vec{\xi} \in [H_0^1(\Omega)]^d, \quad (139a)$$

$$(\nabla \cdot \vec{u}, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega), \quad (139b)$$

$$\left\langle \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\nu}, \chi \right\rangle_{\Gamma(t)} = \langle \vec{u} \cdot \vec{\nu}, \chi \rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \chi \in L^2(\Gamma(t)), \quad (139c)$$

$$\langle \varkappa \vec{\nu}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d. \quad (139d)$$

注记 117 对于 (139) 的充分光滑弱解, 可以形式地证明以下结论。

- (i) 没有外力时, 两相 Stokes 流使界面的曲面面积减小。事实上, 由输运定理, 即定理 32, 在 (139c) 中取 $\chi = \varkappa$, 在 (139a) 中取 $\xi = \vec{u}$, 并在 (139b) 中取 $\varphi = p$, 便得到能量恒等式

$$\begin{aligned} \gamma_0 \frac{d}{dt} |\Gamma(t)| &= -\gamma_0 \left\langle \varkappa \vec{\nu}, \vec{\mathcal{V}} \right\rangle_{\Gamma(t)} = -\gamma_0 \langle \varkappa \vec{\nu}, \vec{u} \rangle_{\Gamma(t)} \\ &= -2(\mu D(\vec{u}), D(\vec{u})) + \left(\vec{f}, \vec{u} \right). \end{aligned} \quad (140)$$

- (ii) 两相 Stokes 流保持 $\mathcal{L}^d(\Omega_{\pm}(t))$ 不变。事实上, 由输运定理, 即定理 33, 在 (139c) 中取 $\chi = 1$, 再利用散度定理以及取 $\varphi = \mathcal{X}_{\Omega_-(t)}$ 时的 (139b), 便有

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^d(\Omega_-(t)) = \left\langle \vec{\mathcal{V}}, \vec{\nu} \right\rangle_{\Gamma(t)} = \langle \vec{u}, \vec{\nu} \rangle_{\Gamma(t)} = (\nabla \cdot \vec{u}, \mathcal{X}_{\Omega_-(t)}) = 0. \quad (141)$$

注记 118 当 $\vec{f} = \vec{0}$ 时, 演化方程 (139) 使界面 $\Gamma(t)$ 的曲面面积减小, 参看 (140); 它也可写为满足 (82) 的一般形式 (81)。说明如下。对于给定的界面 $\Gamma(t)$ 、法向量 $\vec{\nu}(t)$ 和曲率 $\varkappa(t)$, 求解 (139a)、(139b) 得到 $(\vec{u}(\cdot, t), p(\cdot, t)) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L^2(\Omega)$, 并置

$$\mathfrak{F}(\varkappa) = \vec{u} \cdot \vec{\nu}.$$

仿照 (140) 计算, 得到

$$\langle \mathfrak{F}(\varkappa), \varkappa \rangle_{\Gamma(t)} = \langle \vec{u} \cdot \vec{\nu}, \varkappa \rangle_{\Gamma(t)} = \frac{2}{\gamma_0} (\mu D(\vec{u}), D(\vec{u})) \geq 0. \quad (142)$$

8.1.1 有限元逼近 为在 $\mathcal{T}^m$ 上逼近速度和压力, 沿用 (118) 之前的假设和记号, 引入有限元空间 $\mathbb{U}^m \subset [H_0^1(\Omega)]^d$ 和 $\mathbb{P}^m \subset L^2(\Omega)$ 。还需要空间 $\hat{\mathbb{P}}^m = \mathbb{P}^m \cap \hat{\mathbb{P}}$, 其中 $\hat{\mathbb{P}} = \{\varphi \in L^2(\Omega) : (\varphi, 1) = 0\}$ 。若存在与 $h^m = \max_{o \in \mathcal{T}^m} \{\text{diam}(o)\}$ 无关的 $C \in \mathbb{R}_{>0}$, 使得

$$\inf_{\varphi \in \mathbb{P}^m} \sup_{\vec{\xi} \in \mathbb{U}^m} \frac{(\varphi, \nabla \cdot \vec{\xi})}{|\varphi|_{\Omega} \|\vec{\xi}\|_{1,\Omega}} \geq C > 0, \quad (143)$$

则称速度与压力有限元空间对 $(\mathbb{U}^m, \mathbb{P}^m)$ 满足 LBB 下确界—上确界条件。这里, $\|\cdot\|_{1,\Omega}^2 = |\cdot|_{\Omega}^2 + |\nabla \cdot|_{\Omega}^2$ 定义了 Ω 上的 H^1 范数, 参看例如 Girault and Raviart (1986, p. 114)。

下面将 (118) 推广为

$$\mathcal{S}_k^m = \{\chi \in C(\bar{\Omega}) : \chi|_o \in \mathcal{P}_k(o) \quad \forall o \in \mathcal{T}^m\} \subset H^1(\Omega), \quad (144)$$

其中, 对于 $k \in \mathbb{N}$, 以 $\mathcal{P}_k(o)$ 表示 o 上次数不超过 k 的多项式空间。此外, 以 $\mathcal{S}_0^m$ 表示 $\mathcal{T}^m$ 上的分片常数函数空间。例如, 可以选用最低阶的 Taylor-Hood 元 P2-P1、P2-P0 元或 P2-(P1+P0) 元: 置 $\mathbb{U}^m = [\mathcal{S}_2^m]^d \cap \mathbb{U}$, 并分别取 $\mathbb{P}^m = \mathcal{S}_1^m, \mathcal{S}_0^m$ 或 $\mathcal{S}_1^m + \mathcal{S}_0^m$ 。众所周知, 当 $d = 2$ 或 $d = 3$ 时, P2-P1 元满足 LBB 条件 (143); 后一种情形还须满足一个较弱的限制, 即所有单形都至少有一个顶点位于 Ω , 参看 Boffi (1997)。其余两种选择 P2-P0 和 P2-(P1+P0) 在 $d = 2$ 时满足该条件。

同前文一样, 以多面体曲面 Γ^m 逼近时刻 t_m 的界面, 并沿用相同的记号。仿照 §7.3, 以 Ω_+^m 表示 Γ^m 的外部, 以 Ω_-^m 表示 Γ^m 的内部, 从而 $\Gamma^m = \partial\Omega_-^m = \bar{\Omega}_-^m \cap \bar{\Omega}_+^m$ 。为简便起见, 假定 Γ^m 上的单位法向量 $\vec{\nu}^m$ 指向 Ω_+^m 。由于黏度 $\mu_{\pm}$ 随相而异, 现将体区域网格 $\mathcal{T}^m$ 的单元分为外部单元、内部单元和界面单元。置

$$\mathcal{T}_{\pm}^m = \{o \in \mathcal{T}^m : o \subset \Omega_{\pm}^m\}, \quad \mathcal{T}_{\Gamma^m}^m = \{o \in \mathcal{T}^m : o \cap \Gamma^m \neq \emptyset\}. \quad (145)$$

互不相交的划分 $\mathcal{T}^m = \mathcal{T}_-^m \cup \mathcal{T}_+^m \cup \mathcal{T}_{\Gamma^m}^m$ 容易求得, 例如可采用 Barrett et al. (2013a) 中的算法 4.1。

仿照 §7.3, 采用 (139) 的非拟合有限元逼近。对于 $m \geq 0$, 定义离散黏度 $\mu^m \in \mathcal{S}_0^m$ 为

$$\mu|_o^m = \begin{cases} \mu_- & o \in \mathcal{T}_-^m, \\ \mu_+ & o \in \mathcal{T}_+^m, \\ \frac{1}{2}(\mu_- + \mu_+) & o \in \mathcal{T}_{\Gamma^m}^m. \end{cases} \quad (146)$$

Barrett et al. (2013c) 给出的 (139) 的非拟合有限元逼近如下。设闭多面体超曲面 Γ^0 逼近 $\Gamma(0)$, 并沿用时间区间划分 (40)。对于 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $(\vec{U}^{m+1}, P^{m+1}, \vec{X}^{m+1})$,

$\kappa^{m+1}) \in \mathbb{U}^m \times \widehat{\mathbb{P}}^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$, 使得

$$2 \left(\mu^m D(\vec{U}^{m+1}), D(\vec{\xi}) \right) - \left(P^{m+1}, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) = \left(\vec{f}^{m+1}, \vec{\xi} \right) + \gamma_0 \left\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}^m, \quad (147a)$$

$$\left(\nabla \cdot \vec{U}^{m+1}, \varphi \right) = 0 \quad \forall \varphi \in \widehat{\mathbb{P}}^m, \quad (147b)$$

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m} \cdot \vec{\nu}^m, \chi \right\rangle_{\Gamma^m}^h = \left\langle \vec{U}^{m+1} \cdot \vec{\nu}^m, \chi \right\rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (147c)$$

$$\left\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (147d)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 。这里借助插值算子 $\vec{I}_2^m : [C(\overline{\Omega})]^d \rightarrow [\mathcal{S}_2^m]^d$ 定义 $\vec{f}^{m+1} = \vec{I}_2^m \vec{f}(\cdot, t_{m+1})$; 该算子是 $I^m : C(\overline{\Omega}) \rightarrow S^m$ 的自然推广。

注意, 格式 (147) 关于未知量 $(\vec{U}^{m+1}, P^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1})$ 是线性的。为分析 (147), 引入约化形式会更方便。给定 $\mathbb{U}^m$ 和 $\mathbb{P}^m$, 定义

$$\mathbb{U}_0^m = \{ \vec{U} \in \mathbb{U}^m : (\nabla \cdot \vec{U}, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \widehat{\mathbb{P}}^m \}. \quad (148)$$

从 (147) 中消去离散压力, 得到如下约化形式: 对于 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $(\vec{U}^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \mathbb{U}_0^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$, 使得

$$2 \left(\mu^m D(\vec{U}^{m+1}), D(\vec{\xi}) \right) = \left(\vec{f}^{m+1}, \vec{\xi} \right) + \gamma_0 \left\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}_0^m, \quad (149a)$$

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m} \cdot \vec{\nu}^m, \chi \right\rangle_{\Gamma^m}^h = \left\langle \vec{U}^{m+1} \cdot \vec{\nu}^m, \chi \right\rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (149b)$$

$$\left\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (149c)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 。

下面证明格式 (149) 和 (147) 的解的存在性、唯一性以及稳定性。

定理 119

- (i) 设 Γ^m 满足假设 64。则 (149) 有唯一解 $(\vec{U}^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \mathbb{U}_0^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 。
- (ii) 若 $(\vec{U}^{m+1}, P^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \mathbb{U}^m \times \widehat{\mathbb{P}}^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 是 (147) 的解, 则 $(\vec{U}^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1})$ 是 (149) 的解。
- (iii) 设 $(\mathbb{U}^m, \widehat{\mathbb{P}}^m)$ 满足 LBB 条件 (143), 并设 Γ^m 满足假设 64。则 (147) 有唯一解 $(\vec{U}^{m+1}, P^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \mathbb{U}^m \times \widehat{\mathbb{P}}^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 。

证明 (i) 由唯一性即可推出存在性, 故考察齐次线性方程组: 求 $(\vec{U}, \vec{X}, \kappa) \in \mathbb{U}_0^m \times$

$\underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$, 使得

$$2 \left(\mu^m D(\vec{U}), D(\vec{\xi}) \right) = \gamma_0 \left\langle \kappa \vec{\nu}^m, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}_0^m, \quad (150a)$$

$$\left\langle \vec{X} \cdot \vec{\nu}^m, \chi \right\rangle_{\Gamma^m}^h = \Delta t_m \left\langle \vec{U} \cdot \vec{\nu}^m, \chi \right\rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (150b)$$

$$\left\langle \kappa \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m). \quad (150c)$$

只须证明零解是唯一可能的解。在 (150a) 中取 $\vec{\xi} = \Delta t_m \vec{U}$, 在 (150b) 中取 $\chi = \gamma_0 \kappa$, 并在 (150c) 中取 $\vec{\eta} = \gamma_0 \vec{X}$, 得到

$$2 \Delta t_m \left(\mu^m D(\vec{U}), D(\vec{U}) \right) + \gamma_0 \left| \nabla_s \vec{X} \right|_{\Gamma^m}^2 = 0.$$

由 Korn 不等式, 参看例如 Zeidler (1988, §62.15), 便有 $\vec{U} = \vec{0}$ 。再由 (150b)、(150c) 以及引理 66 的证明可知, $\vec{X} = \vec{0}$ 且 $\kappa = 0$ 。

(ii) 由 (147b) 和 $\mathbb{U}_0^m$ 的定义, 结论立即成立。

(iii) 考察齐次方程组。对于 $(\vec{U}, P, \vec{X}, \kappa) \in \mathbb{U}^m \times \widehat{\mathbb{P}}^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$, 由 (ii) 和 (i) 立即得到 $\vec{U} = \vec{0}$ 、 $\vec{X} = \vec{0}$ 和 $\kappa = 0$ 。再由 LBB 下确界—上确界条件 (143) 可知 $P = 0$ 。□

定理 120 设 $d = 2$ 或 $d = 3$ 。设 $(\vec{U}^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \mathbb{U}_0^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 是 (149) 的解, 或 $(\vec{U}^{m+1}, P^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \mathbb{U}^m \times \widehat{\mathbb{P}}^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 是 (147) 的解。则

$$\gamma_0 |\Gamma^{m+1}| + 2 \Delta t_m \left(\mu^m D(\vec{U}^{m+1}), D(\vec{U}^{m+1}) \right) \leq \gamma_0 |\Gamma^m| + \Delta t_m \left(\vec{f}^{m+1}, \vec{U}^{m+1} \right). \quad (151)$$

证明 由定理 119(ii) 可知, 只须考察 (149)。在 (149a) 中取 $\vec{\xi} = \vec{U}^{m+1} \in \mathbb{U}_0^m$, 在 (149b) 中取 $\chi = \gamma_0 \kappa^{m+1}$, 并在 (149c) 中取 $\vec{\eta} = \gamma_0 (\vec{X}^{m+1} - \text{id}_{|\Gamma^m})$, 得到

$$\begin{aligned} & 2 \Delta t_m \left(\mu^m D(\vec{U}^{m+1}), D(\vec{U}^{m+1}) \right) + \gamma_0 \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s (\vec{X}^{m+1} - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma^m} \\ & = \Delta t_m \left(\vec{f}^{m+1}, \vec{U}^{m+1} \right). \end{aligned}$$

由引理 57 立即得到 (151)。□

注记 121

(i) 稳定性估计 (151) 是 (140) 的自然全离散对应。

(ii) 当 $\vec{f} = \vec{0}$ 时, 利用 §5.4 的一般方法, 并由 (142), 也可导出稳定性估计 (151)。为此, 给定 Γ^m 和 $\kappa \in V(\Gamma^m)$, 令 $\vec{U} \in \mathbb{U}_0^m$ 为下式的唯一解:

$$2 \left(\mu^m D(\vec{U}), D(\vec{\xi}) \right) = \gamma_0 \left\langle \kappa \vec{\nu}^m, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}_0^m. \quad (152)$$

再定义 $\mathfrak{F}^m(\kappa) \in V(\Gamma^m)$, 使得对所有 $\chi \in V(\Gamma^m)$ 均有 $\langle \mathfrak{F}^m(\kappa), \chi \rangle_{\Gamma^m}^h = \langle \vec{U}, \chi \vec{\nu}^m \rangle_{\Gamma^m}^h$ 在 (152) 中取 $\vec{\xi} = \vec{U}$, 得到

$$\langle \mathfrak{F}^m(\kappa), \kappa \rangle_{\Gamma^m}^h = \frac{2}{\gamma_0} \left(\mu^m D(\vec{U}), D(\vec{U}) \right) \geq 0 \quad \forall \kappa \in V(\Gamma^m).$$

于是由定理 90(ii) 得到所需的稳定性结论。

- (iii) 当 Γ^m 、 $m = 1, \dots, M$ 时, 格式 (147) 能得到性质良好的网格。仿照 §4.6, 考察其半离散形式即可说明这一点, 参看 Barrett et al. (2013c, 注记 3)。具体而言, 在二维空间中得到等分布, 在三维空间中得到共形多面体超曲面。

注记 122 (离散线性方程组) 沿用注记 111 中的记号与定义。此外, 按照求解由 (Navier-)Stokes 方程离散所得线性方程组的通常做法, 以 $\mathbb{P}^m$ 代替受约束的压力空间 $\widehat{\mathbb{P}}^m$, 转而考察超定线性方程组, 以免处理该约束所带来的困难。容许在记号上作显然的混用, 将 (147) 中的 $\widehat{\mathbb{P}}^m$ 换为 $\mathbb{P}^m$ 后, 其线性方程组可写为: 求 $(\vec{U}^{m+1}, P^{m+1}, \kappa^{m+1}, \delta \vec{X}^{m+1}) \in (\mathbb{R}^d)^{K_{\mathbb{U}^m}} \times \mathbb{R}^{K_{\mathbb{P}^m}} \times \mathbb{R}^K \times (\mathbb{R}^d)^K$, 使得

$$\begin{pmatrix} B_{\Omega} & \vec{C}_{\Omega} & -\gamma_0 \vec{N}_{\Gamma^m, \Omega} & 0 \\ \vec{C}_{\Omega}^{\top} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{N}_{\Gamma^m, \Omega}^{\top} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta t_m} \vec{N}_{\Gamma^m}^{\top} \\ 0 & 0 & \vec{N}_{\Gamma^m} & A_{\Gamma^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^{m+1} \\ P^{m+1} \\ \kappa^{m+1} \\ \delta \vec{X}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\Omega} \vec{f}^{m+1} \\ 0 \\ 0 \\ -A_{\Gamma^m} \vec{X}^m \end{pmatrix}, \quad (153)$$

其中 $K_{\mathbb{U}^m}$ 和 $K_{\mathbb{P}^m}$ 分别表示有限元空间 $\mathbb{U}^m$ 和 $\mathbb{P}^m$ 的自由度数。(153) 中各矩阵的定义或由 (45) 给出, 或直接由 (147) 得到; 细节亦可参看 Barrett et al. (2015b, §5)。

超定线性方程组 (153) 可以直接用稀疏 QR 分解法求解, 例如 SPQR, 参看 Davis (2011)。也可以采用 Schur 补方法, 先从 (153) 中消去 $(\kappa^{m+1}, \delta \vec{X}^{m+1})$, 再用迭代法求解关于 $(\vec{U}^{m+1}, P^{m+1})$ 的剩余方程组。这一方法的好处在于, 对约化方程组可以采用标准 (Navier-)Stokes 方程有限元离散中已有的求解方法。具体而言, 置

$$\Xi_{\Gamma^m} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\Delta t_m} \vec{N}_{\Gamma^m}^{\top} \\ \vec{N}_{\Gamma^m} & A_{\Gamma^m} \end{pmatrix}$$

由引理 66 可知, 若假设 64 成立, 则矩阵 Ξ_{Γ^m} 非奇异。定义

$$T_{\Omega} = (\vec{N}_{\Gamma^m, \Omega}^{\top} \ 0) \Xi_{\Gamma^m}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{N}_{\Gamma^m, \Omega}^{\top} \\ 0 \end{pmatrix}$$

则 (153) 可约化为

$$\begin{pmatrix} \vec{B}_\Omega + \gamma_0 T_\Omega & \vec{C}_\Omega \\ \vec{C}_\Omega^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^{m+1} \\ P^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_\Omega \vec{f}^{m+1} - \gamma_0 (\vec{N}_{\Gamma^m, \Omega} 0) \Xi_{\Gamma^m}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ A_{\Gamma^m} \vec{X}^m \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (154)$$

以及 $\begin{pmatrix} \kappa^{m+1} \\ \delta \vec{X}^{m+1} \end{pmatrix} = \Xi_{\Gamma^m}^{-1} \begin{pmatrix} -\vec{N}_{\Gamma^m, \Omega}^\top \vec{U}^{m+1} \\ -A_{\Gamma^m} \vec{X}^m \end{pmatrix}$. 例如, 线性方程组 (154) 可用标准 (Navier-)Stokes 离散中的预条件 GMRES 迭代法求解, 一些例子见 Elman et al. (2005). 关于 (154) 的具体预条件子以及可用求解方法的进一步细节, 参看 Barrett et al. (2015b, §5).

8.1.2 半离散有限元逼近 本节引入 (147) 的时间连续半离散形式. 仿照 (118) 和 (144), 对于 Ω 的固定规则剖分 $\mathcal{T}^h$, 其中 $\bar{\Omega} = \cup_{o \in \mathcal{T}^h} \bar{o}$, 引入有限元空间

$$\mathcal{S}_k^h = \{\chi \in C(\bar{\Omega}) : \chi|_o \in \mathcal{P}_k(o) \quad \forall o \in \mathcal{T}^h\} \subset H^1(\Omega), \quad k \in \mathbb{N}.$$

同前, 以 $\mathcal{S}_0^h$ 表示 $\mathcal{T}^h$ 上的分片常数函数空间. 设 $\mathbb{U}^h \subset [H_0^1(\Omega)]^d$ 和 $\mathbb{P}^h(t) \subset L^2(\Omega)$ 分别为半离散速度与压力逼近的有限元空间, 并置 $\widehat{\mathbb{P}}^h(t) = \mathbb{P}^h(t) \cap \widehat{\mathbb{P}}$. 注意, $\mathbb{U}^h$ 是固定的; 不过, 为便于后文的讨论, 允许离散压力空间 $\mathbb{P}^h(t)$ 随时间变化, 参看下文 §8.1.3. 此外, 沿用 §3.4 中关于演化多面体曲面、相应有限元空间和离散时间导数的记号, 并定义

$$\widehat{\mathbb{P}}_T^h = \left\{ \varphi \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) : \varphi(t) \in \widehat{\mathbb{P}}^h(t) \quad \forall t \in (0, T] \right\}. \quad (155)$$

给定 $\Gamma^h(t)$, 以 $\Omega_+^h(t)$ 表示 $\Gamma^h(t)$ 的外部, 以 $\Omega_-^h(t)$ 表示 $\Gamma^h(t)$ 的内部, 从而 $\Gamma^h(t) = \partial\Omega_-^h(t) = \overline{\Omega_-^h(t)} \cap \overline{\Omega_+^h(t)}$. 与 (145) 完全一样, 将体区域网格 $\mathcal{T}^h$ 的单元分为内部、外部和界面单元; 离散黏度 $\mu^h(t) \in \mathcal{S}_0^h$ 则定义为 (146) 的自然半离散对应.

由此, (147) 的半离散形式可表述如下. 给定闭多面体超曲面 $\Gamma^h(0)$, 求演化多面体超曲面 $\mathcal{G}_T^h$ 及其诱导速度 $\vec{\mathcal{V}}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$, 并求 $\kappa^h \in V(\mathcal{G}_T^h)$ 、 $\vec{U}^h \in L^2(0, T; \mathbb{U}^h)$ 和 $P^h \in \widehat{\mathbb{P}}_T^h$, 使得对所有 $t \in (0, T]$, 所求的 $(\vec{U}^h(\cdot, t), P^h(\cdot, t), \vec{\mathcal{V}}^h(\cdot, t), \kappa^h(\cdot, t)) \in \mathbb{U}^h \times \widehat{\mathbb{P}}^h(t) \times \underline{V}(\Gamma^h(t)) \times V(\Gamma^h(t))$ 满足

$$2 \left(\mu^h D(\vec{U}^h), D(\vec{\xi}) \right) - \left(P^h, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) = \left(\vec{f}^h, \vec{\xi} \right) + \gamma_0 \left\langle \kappa^h \vec{\mathcal{V}}^h, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}^h, \quad (156a)$$

$$\left(\nabla \cdot \vec{U}^h, \varphi \right) = 0 \quad \forall \varphi \in \widehat{\mathbb{P}}^h(t), \quad (156b)$$

$$\left\langle \vec{\mathcal{V}}^h \cdot \vec{\mathcal{V}}^h, \chi \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = \left\langle \vec{U}^h \cdot \vec{\mathcal{V}}^h, \chi \right\rangle_{\Gamma^h(t)} \quad \forall \chi \in V(\Gamma^h(t)), \quad (156c)$$

$$\left\langle \kappa^h \vec{\mathcal{V}}^h, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \quad (156d)$$

其中 $\vec{f}^h$ 是全离散外力 $\vec{f}^{m+1}$ 、 $m = 0, \dots, M-1$ 的自然半离散对应。

定理 123 设 $(\mathcal{G}_T^h, \kappa^h, \vec{U}^h, P^h)$ 是 (156) 的解。

(i) 有

$$\gamma_0 \frac{d}{dt} |\Gamma^h(t)| + 2 \left(\mu^h D(\vec{U}^h), D(\vec{U}^h) \right) = \left(\vec{f}^h, \vec{U}^h \right).$$

(ii) 若 $\mathcal{X}_{\Omega_-^h(t)} \in \mathbb{P}^h(t)$, 则

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^d(\Omega_-^h(t)) = 0.$$

(iii) 对于任意 $t \in (0, T]$, $\Gamma^h(t)$ 是共形多面体曲面。特别地, 当 $d = 2$ 时, 曲线 $\Gamma^h(t)$ 的任意两个相邻单元或者等长, 或者互相平行。

证明 (i) 仿照定理 79(i) 的证明, 在 (156) 中取 $\vec{\xi} = \vec{U}^h(\cdot, t) \in \mathbb{U}^h$ 、 $\varphi = P^h(\cdot, t) \in \widehat{\mathbb{P}}^h(t)$ 、 $\chi = \kappa^h(\cdot, t) \in V(\Gamma^h(t))$ $\vec{\eta} = \vec{V}^h(\cdot, t) \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$, 得到

$$\begin{aligned} \gamma_0 \frac{d}{dt} |\Gamma^h(t)| &= \gamma_0 \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{V}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = -\gamma_0 \left\langle \vec{V}^h, \kappa^h \vec{v}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)} \\ &= -\gamma_0 \left\langle \vec{U}^h, \kappa^h \vec{v}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = \left(\vec{f}^h, \vec{U}^h \right) - 2 \left(\mu^h D(\vec{U}^h), D(\vec{U}^h) \right), \end{aligned}$$

这正是所需结论。

(ii) 仿照定理 88(ii) 的证明, 在 (156c) 中取 $\chi = 1$, 在 (156b) 中取 $\varphi = \mathcal{X}_{\Omega_-^h(t)} - \frac{\mathcal{L}^d(\Omega_-^h(t))}{\mathcal{L}^d(\Omega)} \in \widehat{\mathbb{P}}^h(t)$, 再用散度定理, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}^d(\Omega_-^h(t)) &= \left\langle \vec{V}^h, \vec{v}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = \left\langle \vec{U}^h, \vec{v}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = \left(\nabla \cdot \vec{U}^h, \mathcal{X}_{\Omega_-^h(t)} \right) \\ &= \left(\nabla \cdot \vec{U}^h, \mathcal{X}_{\Omega_-^h(t)} - \frac{\mathcal{L}^d(\Omega_-^h(t))}{\mathcal{L}^d(\Omega)} \right) = 0, \end{aligned}$$

这就是 (141) 的离散对应。

(iii) 由定义 60 和定理 62 立即得到。 $\square$

8.1.3 用于相体积守恒的 XFEM_Γ 总质量守恒等价于 $\mathcal{L}^d(\Omega_-(t))$ 守恒, 参看 (141); 显然, 也希望离散问题具有这一性质。由定理 123(ii) 已知, 半离散格式 (156) 只有在时间相关的离散压力空间 $\mathbb{P}^h(t)$ 对所有 $t \in [0, T]$ 均包含离散内部相 $\mathcal{X}_{\Omega_-^h(t)}$ 的特征函数时, 才保证 $\mathcal{L}^d(\Omega_-^h(t))$ 守恒。因此, Barrett et al. (2013c, §3.4) 对全离散逼近 (147) 建议: 仅向压力空间 $\mathbb{P}^m$ 增添一个基函数, 即 $\mathcal{X}_{\Omega_-^m}$ 。该文称此为 XFEM_Γ 方法, 因为由 $\mathcal{X}_{\Omega_-^m} - \frac{\mathcal{L}^d(\Omega_-^m)}{\mathcal{L}^d(\Omega)} \in \widehat{\mathbb{P}}^m$ 在 (147a) 和 (147b) 中产生的附加项可以写成 Γ^m 上的积分。

事实上, 由散度定理有

$$\left(\nabla \cdot \vec{\xi}, \mathcal{X}_{\Omega_-^m} - \frac{\mathcal{L}^d(\Omega_-^m)}{\mathcal{L}^d(\Omega)} \right) = \left(\nabla \cdot \vec{\xi}, \mathcal{X}_{\Omega_-^m} \right) = \left\langle \vec{\nu}^m, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}^m. \quad (157)$$

对于全离散逼近 (147), 即使采用 XFEM_Γ 压力空间扩充, 也无法证明总质量守恒。不过, 将取 $\vec{\xi} = \vec{U}^{m+1}$ 时的 (157) 与 (147b)、(147c) 联立, 便得到

$$\left\langle \vec{X}^{m+1} - \text{id}, \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m} = 0,$$

这意味着, 在实际计算中, 该全离散逼近能很好地保持两相体积, 亦参看注记 89(ii)。

此外, XFEM_Γ 方法还能避免伪速度。以下定理给出准确的表述。

定理 124

- (i) 设 $d = 2$ 或 $d = 3$ 。设 $(\vec{U}^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \mathbb{U}^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 是取 $\vec{f}^{m+1} = \vec{0}$ 时的 (149) 的解。若 $\vec{X}^{m+1} = \text{id}|_{\Gamma^m}$, 则 $\vec{U}^{m+1} = \vec{0}$ 。
- (ii) 设 $\mathcal{X}_{\Omega_-^m} \in \mathbb{P}^m$, 并设 Γ^m 满足假设 64。设多面体曲面 Γ^m 的离散平均曲率为常数, 即存在常数 $\bar{\kappa} \in \mathbb{R}$, 使得

$$\bar{\kappa} \langle \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m} + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m).$$

则 Γ^m 是共形多面体曲面, 参看定义 60, 而且 $(\vec{U}^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) = (\vec{0}, \vec{X}^m, \bar{\kappa}) \in \mathbb{U}_0^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 是取 $\vec{f}^{m+1} = \vec{0}$ 时的 (149) 的唯一解。

- (iii) 设 (ii) 的假设成立, 并设 $(\mathbb{U}^m, \widehat{\mathbb{P}}^m)$ 满足 LBB 条件 (143)。则 Γ^m 是共形多面体曲面, 而 且 $(\vec{U}^{m+1}, P^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) = (\vec{0}, -\gamma_0 \bar{\kappa} [\mathcal{X}_{\Omega_-^m} - \frac{\mathcal{L}^d(\Omega_-^m)}{\mathcal{L}^d(\Omega)}], \text{id}|_{\Gamma^m}, \bar{\kappa}) \in \mathbb{U}^m \times \widehat{\mathbb{P}}^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 是取 $\vec{f}^{m+1} = \vec{0}$ 时的 (147) 的唯一解。

证明 (i) 由定理 120, 该解满足 (151), 其中 Γ^{m+1} 换为 Γ^m , 且 $\vec{f}^{m+1} = \vec{0}$ 。于是得到 $(\mu^m D(\vec{U}^{m+1}), D(\vec{U}^{m+1})) = 0$, 再由 Korn 不等式可知 $\vec{U}^{m+1} = \vec{0}$ 。

(ii) 由 (20) 立即可知 Γ^m 是共形多面体曲面。根据定理 119(i), 要证明其余结论, 只须证明 $(\vec{U}^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) = (\vec{0}, \text{id}|_{\Gamma^m}, \bar{\kappa})$ 是取 $\vec{f}^{m+1} = \vec{0}$ 时的 (149) 的解。这立即由下列两式得出: 对所有 $\vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m)$, $\bar{\kappa} \langle \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m} = \langle \bar{\kappa} \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h$ 以及

$$\left\langle \vec{\nu}^m, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^m} = \left(\nabla \cdot \vec{\xi}, \mathcal{X}_{\Omega_-^m} - \frac{\mathcal{L}^d(\Omega_-^m)}{\mathcal{L}^d(\Omega)} \right) = 0 \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}_0^m,$$

这里用到了 (157) 和 (148)。

(iii) 结合定理 119(iii), 证明与 (ii) 相仿。事实上,

$$\begin{aligned} & \gamma_0 \left\langle \kappa^{m+1} \vec{v}^m, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^m} + \left(P^{m+1}, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) \\ &= \gamma_0 \bar{\kappa} \left\langle \vec{v}^m, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^m} - \gamma_0 \bar{\kappa} \left(\mathcal{X}_{\Omega_-^m} - \frac{\mathcal{L}^d(\Omega_-^m)}{\mathcal{L}^d(\Omega)}, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) = 0 \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}^m, \end{aligned}$$

由此即得结论。 $\square$

注记 125 由定理 124 可知, 不论如何选取 $\mu_{\pm}$, 离散稳态解 $\Gamma^{m+1} = \Gamma^m$ 都不会产生伪速度。此外, 采用 XFEM $_{\Gamma}$ 方法时, 离散平均曲率为常数的多面体曲面是离散稳态解。特别地, 球形气泡可以由这样的多面体曲面逼近, 因此在这些情形下, 本方法具有速度为零的稳态解。许多其他离散方法没有这一性质, 这也是它们在球形气泡这类简单情形下产生伪速度的原因之一。

8.1.4 基于流体切向速度的逼近 下面简要讨论两相 Stokes 流的另一种逼近。它以 (136a) 和

$$[\vec{u}]_-^+ = \vec{0}, \quad [(2\mu D(\vec{u}) - p \text{Id}) \vec{v}]_-^+ = -\gamma_0 \vec{\kappa}, \quad \vec{\kappa} = \Delta_s \vec{\text{id}}, \quad \vec{v} = \vec{u} \quad \text{在 } \Gamma(t)$$

的弱形式为基础, 而不是采用 (136) 与 (137)。与 (156) 相应的半离散有限元逼近由下列方程构成:

$$2 \left(\mu^h D(\vec{U}^h), D(\vec{\xi}) \right) - \left(P^h, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) = \left(\vec{f}^h, \vec{\xi} \right) + \gamma_0 \left\langle \vec{\kappa}^h, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}^h, \quad (158a)$$

$$\left(\nabla \cdot \vec{U}^h, \varphi \right) = 0 \quad \forall \varphi \in \widehat{\mathbb{P}}^h(t), \quad (158b)$$

$$\left\langle \vec{v}^h, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = \left\langle \vec{U}^h, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \quad \forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \quad (158c)$$

$$\left\langle \vec{\kappa}^h, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \nabla_s \vec{\text{id}}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \quad (158d)$$

其中 $(\vec{U}^h(\cdot, t), P^h(\cdot, t), \vec{v}^h(\cdot, t), \vec{\kappa}^h(\cdot, t)) \in \mathbb{U}^h \times \widehat{\mathbb{P}}^h(t) \times \underline{V}(\Gamma^h(t)) \times \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 。注意, 也可考察不采用数值积分的 (158) 的变体; 全离散情形的细节见 Barrett et al. (2013c, §3.6)。容易证明, (158) 的解满足定理 123(i) 的稳定性结论。不过, $\vec{v}^h(\cdot, t)$ 不是 (158c) 中容许的检验函数, 因此, 即使 $\mathcal{X}_{\Omega^h(t)} \in \mathbb{P}^h(t)$, 也无法对 (158) 的解证明定理 123(ii) 的体积守恒结论。另一方面, 在 (158c) 中取 $\vec{\chi} = \vec{\omega}^h(\cdot, t) \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$, 由定理 71 和 (20) 得到

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^d(\Omega_-^h(t)) = \left\langle \vec{v}^h, \vec{v}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = \left\langle \vec{v}^h, \vec{\omega}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = \left\langle \vec{U}^h, \vec{\omega}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h. \quad (159)$$

因此, 直接施加所需条件

$$\left\langle \vec{U}^h, \vec{\omega}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = 0$$

并引入适当的 Lagrange 乘子 $P_{\text{sing}}^h(t) \in \mathbb{R}$, 便可构造下述两相 Stokes 流的半离散逼近, 使其满足定理 123(i)、(ii)。注意, 为使 (159) 成立, 关键是在 $\Gamma^h(t)$ 上始终采用数值积分。

给定闭多面体超曲面 $\Gamma^h(0)$, 求演化多面体超曲面 $\mathcal{G}_T^h$ 及其诱导速度 $\vec{V}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$, 并求 $\vec{\kappa}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$ 、 $\vec{U}^h \in L^2(0, T; \mathbb{U}^h)$ 、 $P^h \in \widehat{\mathbb{P}}_T^h$ 和 $P_{\text{sing}}^h \in L^2(0, T; \mathbb{R})$, 使得对所有 $t \in (0, T]$, 所求的 $(\vec{U}^h(\cdot, t), P^h(\cdot, t), P_{\text{sing}}^h(t), \vec{V}^h(\cdot, t), \vec{\kappa}^h(\cdot, t)) \in \mathbb{U}^h \times \widehat{\mathbb{P}}^h(t) \times \mathbb{R} \times \underline{V}(\Gamma^h(t)) \times \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 满足

$$\begin{aligned} 2 \left(\mu^h D(\vec{U}^h), D(\vec{\xi}) \right) - \left(P^h, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) - P_{\text{sing}}^h \left\langle \vec{\omega}^h, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\ = \left(\vec{f}^h, \vec{\xi} \right) + \gamma_0 \left\langle \vec{\kappa}^h, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}^h, \end{aligned} \quad (160a)$$

$$\left(\nabla \cdot \vec{U}^h, \varphi \right) = 0 \quad \forall \varphi \in \widehat{\mathbb{P}}^h(t) \quad \text{和} \quad \left\langle \vec{U}^h, \vec{\omega}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = 0, \quad (160b)$$

$$\left\langle \vec{V}^h, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = \left\langle \vec{U}^h, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \quad \forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \quad (160c)$$

$$\left\langle \vec{\kappa}^h, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)). \quad (160d)$$

从压力空间扩充的角度看, 上述过程可视为一种虚拟元方法, 参看例如 [Beirão da Veiga et al. \(2013\)](#)。

8.2 两相 Navier–Stokes 流

作者在 [Barrett et al. \(2015b\)](#) 中将逼近 (147) 推广至两相 Navier–Stokes 流。其模型仍为 (136), 但将 (136a) 中的第一个方程换为

$$\rho(\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) - 2\mu \nabla \cdot D(\vec{u}) + \nabla p = \vec{f} \quad \text{于 } \Omega_{\pm}(t),$$

其中 $\rho(\cdot, t) = \rho_+ \chi_{\Omega_+(t)} + \rho_- \chi_{\Omega_-(t)}$, $\rho_{\pm} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 表示两种流体的密度, 并增添初始条件: 在 Ω 中, $\rho(\cdot, 0) \vec{u}(\cdot, 0) = \rho(\cdot, 0) \vec{u}_0$ 。界面演化的处理方式以及它与体区域中各量的耦合保持不变; 体区域中流体运动的逼近则可采用单相 Navier–Stokes 流有限元逼近的标准方法, 参看例如 [Temam \(2001\)](#)。以下回顾 [Barrett et al. \(2015b\)](#) 的全离散逼近。其所依据的两相 Navier–Stokes 流弱形式由 (139) 给出, 只须在 (139a) 左端增加

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\rho \vec{u}, \vec{\xi} \right) + \frac{1}{2} \left(\rho \partial_t \vec{u}, \vec{\xi} \right) + \frac{1}{2} \left(\rho, [(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}] \cdot \vec{\xi} - [(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\xi}] \cdot \vec{u} \right) \quad (161)$$

参看 Barrett et al. (2015b, (3.9))。

对于 $m \geq 0$, 仿照 (146) 定义 $\rho^m \in \mathcal{S}_0^m$, 并置 $\rho^{-1} = \rho^0$ 。此外, 定义标准投影算子 $I_0^m : L^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_0^m$, 使得对所有 $o \in \mathcal{T}^m$ 均有 $(I_0^m \eta)|_o = \frac{1}{\mathcal{L}^d(o)} \int_o \eta \, d\mathcal{L}^d$ 。本节将 $[0, T]$ 按等距时间步长 $\Delta t = \frac{T}{M}$ 分划, 所得分划为 $t_m = m \Delta t$, $m = 0, \dots, M$ 。采用等距时间步长, 是为了对 (161) 中的时间导数项构造相容的全离散逼近。设闭多面体超曲面 Γ^0 逼近 $\Gamma(0)$, 并设 $\vec{U}^0 \in \mathbb{U}^0$ 逼近 $\vec{u}_0$ 。对于 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $(\vec{U}^{m+1}, P^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \mathbb{U}^m \times \widehat{\mathbb{P}}^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$, 使得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^m \vec{U}^{m+1} - (I_0^m \rho^{m-1}) \vec{I}_2^m \vec{U}^m}{\Delta t} + (I_0^m \rho^{m-1}) \frac{\vec{U}^{m+1} - \vec{I}_2^m \vec{U}^m}{\Delta t}, \vec{\xi} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\rho^m, [(\vec{I}_2^m \vec{U}^m \cdot \nabla) \vec{U}^{m+1}] \cdot \vec{\xi} - [(\vec{I}_2^m \vec{U}^m \cdot \nabla) \vec{\xi}] \cdot \vec{U}^{m+1} \right) \\ & + 2 \left(\mu^m D(\vec{U}^{m+1}), D(\vec{\xi}) \right) - \left(P^{m+1}, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) = \left(\vec{f}^{m+1}, \vec{\xi} \right) + \gamma_0 \left\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^m} \\ & \qquad \qquad \qquad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}^m, \end{aligned} \quad (162a)$$

$$(\nabla \cdot \vec{U}^{m+1}, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \widehat{\mathbb{P}}^m, \quad (162b)$$

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t} \cdot \vec{\nu}^m, \chi \right\rangle_{\Gamma^m}^h = \left\langle \vec{U}^{m+1} \cdot \vec{\nu}^m, \chi \right\rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \quad (162c)$$

$$\left\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m), \quad (162d)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 。显然, 当 $\rho_- = \rho_+ = 0$ 时, 逼近 (162) 退化为采用等距时间步长的两相 Stokes 流格式 (147)。

定理 126

- (i) 设 $(\mathbb{U}^m, \widehat{\mathbb{P}}^m)$ 满足 LBB 条件 (143), 设 Γ^m 满足假设 64, 并设 $\vec{U}^m \in [C(\bar{\Omega})]^d$ 。则 (162) 有唯一解 $(\vec{U}^{m+1}, P^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \mathbb{U}^m \times \widehat{\mathbb{P}}^m \times \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 。
- (ii) 设 $d = 2$ 或 $d = 3$ 。则 (162) 的解满足

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\rho^m, |\vec{U}^{m+1}|^2 \right) + \gamma_0 |\Gamma^{m+1}| + \frac{1}{2} \left(I_0^m \rho^{m-1}, |\vec{U}^{m+1} - \vec{I}_2^m \vec{U}^m|^2 \right) \\ & + 2 \Delta t \left(\mu^m D(\vec{U}^{m+1}), D(\vec{U}^{m+1}) \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(I_0^m \rho^{m-1}, |\vec{I}_2^m \vec{U}^m|^2 \right) + \gamma_0 |\Gamma^m| + \Delta t \left(\vec{f}^{m+1}, \vec{U}^{m+1} \right). \end{aligned} \quad (163)$$

证明 (i) 证明与定理 119 相同。

(ii) 在 (162a) 中取 $\vec{\xi} = \vec{U}^{m+1}$, 在 (162b) 中取 $\varphi = P^{m+1}$, 在 (162c) 中取 $\chi = \gamma_0 \kappa^{m+1}$, 并在 (162d) 中取 $\vec{\eta} = \gamma_0 (\vec{X}^{m+1} - \text{id}|_{\Gamma^m})$, 得到

$$\frac{1}{2} \left(\rho^m \vec{U}^{m+1}, \vec{U}^{m+1} \right) + \frac{1}{2} \left((I_0^m \rho^{m-1}) (\vec{U}^{m+1} - \vec{I}_2^m \vec{U}^m), \vec{U}^{m+1} - \vec{I}_2^m \vec{U}^m \right)$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \Delta t \left(\mu^m D(\vec{U}^{m+1}), D(\vec{U}^{m+1}) \right) + \gamma_0 \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s (\vec{X}^{m+1} - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma^m} \\
& = \frac{1}{2} \left((I_0^m \rho^{m-1}) \vec{I}_2^m \vec{U}^m, \vec{I}_2^m \vec{U}^m \right) + \Delta t \left(\vec{f}^{m+1}, \vec{U}^{m+1} \right).
\end{aligned}$$

再由引理 57 立即得到 (163)。

□

注记 127

(i) 若 $d = 2$ 或 $d = 3$, 并假定

$$\left(I_0^m \rho^{m-1}, |\vec{I}_2^m \vec{U}^m|^2 \right) \leq \left(\rho^{m-1}, |\vec{U}^m|^2 \right) \quad \text{对 } m = 1, \dots, M-1,$$

则可证明格式 (162) 的无条件稳定性估计, 参看 Barrett et al. (2015b, 定理 4.2)。如果随时间推进不对体区域网格作粗化, 则这一条件总是成立。

(ii) 若

$$\mathcal{X}_{\Omega_m} \in \mathbb{P}^m \quad \text{对 } m = 0, \dots, M-1,$$

则 (162) 的时间连续半离散形式精确保持两相体积。这可由注记 117(ii) 的直接离散对应得到, 前文 §8.1.3 已作讨论。

(iii) 格式 (162) 能得到性质良好的网格; 照例, 考察其半离散形式即可说明这一点, 参看 §4.6。具体而言, 在二维空间中得到等分布, 在三维空间中得到共形多面体超曲面。

(iv) 容易将格式 (162), 从而也将 (147), 推广至比流体在 $\partial\Omega$ 上满足 $\vec{u} = \vec{0}$ 更一般的边界条件。除这种无滑移条件外, 还可考虑自由滑移、无应力边界条件, 以及相应的非齐次边界条件。细节见 Barrett et al. (2013c, 2015b, 2016a)。

(v) 由 (162) 产生的离散线性方程组可按注记 122 中的方法求解。

图 6 展示了格式 (162) 的一种推广所得到的若干数值结果; 该推广例如允许在边界 $\partial\Omega$ 的部分区域施加自由滑移条件, 并考虑重力 $\vec{f} = \rho \vec{f}_1$ 。图 6 给出 Barrett et al. (2015b) 的三个不同模拟中上升气泡的界面, 并将流体运动可视化。两个二维模拟的密度分别为 $10\rho_- = \rho_+ = 10^3$ 和 $10^3\rho_- = \rho_+ = 10^3$, 三维模拟的密度为 $10\rho_- = \rho_+ = 10^3$ 。在每个例子中, 内部流体的密度均小于外部流体的密度, 因此气泡在重力作用下上升。

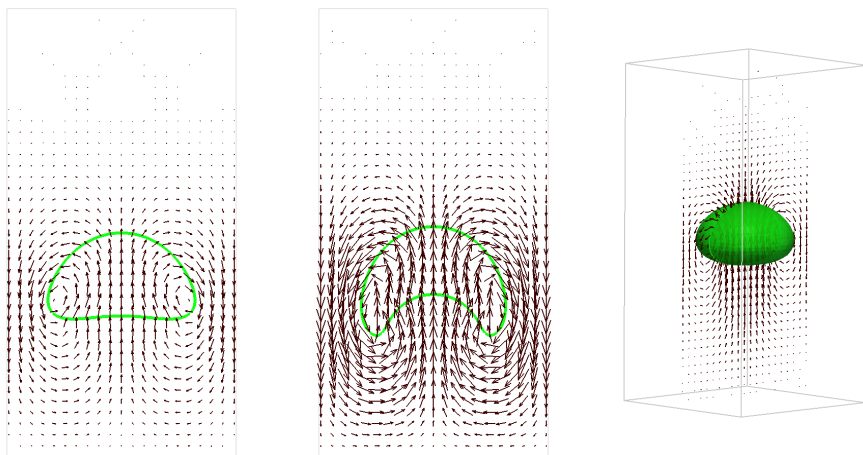


图 6: Barrett et al. (2015b) 中图 3、7 和 11 所示上升液滴实验的数值结果。各图给出时刻 $t = 1.5$ 的界面 Γ^m 与速度 $\vec{U}^m$ 。对于三维实验，仅在穿过 Ω 的二维截面内显示流体速度。

8.3 其他数值方法

以特征函数描述界面的界面追踪方法，也常用于两相流问题的数值求解。流体体积 (VOF) 法用其中一相的特征函数推进界面，Hirt and Nichols (1981) 和 Renardy and Renardy (2002) 均采用过这一方法。另一种界面追踪方法是水平集法，它用水平集函数追踪界面；细节见 Sussman et al. (1994)、Groß and Reusken (2011) 及其中的参考文献。在这一背景下，相场方法也称为弥散界面方法，其数值研究见 Kim et al. (2004); Kay et al. (2008); Grün and Klingbeil (2014); Garcke et al. (2016)。其他利用多面体网格直接表示界面的参数方法，见 Unverdi and Tryggvason (1992); Bänsch (2001); Tryggvason et al. (2001); Ganesan et al. (2007); Agnese and Nürnberg (2016, 2019)。

逼近 (162) 可推广至存在表面活性剂的情形。此时，表面张力 γ_0 依赖于移动界面上表面活性剂的局部浓度。作者分别在 Barrett et al. (2015e) 和 Barrett et al. (2015d) 中研究了不可溶与可溶表面活性剂的情形。含表面活性剂两相流的其他方法，见 James and Lowengrub (2004); Groß and Reusken (2011); Ganesan and Tobiska (2012); Aland et al. (2017) 及其中的参考文献。

第九章

Willmore 流

9.1 流的推导

Willmore 流是 Willmore 能量的 L^2 梯度流。对于 $\mathbb{R}^d$ 中充分光滑的超曲面 Γ ，其中 $d \geq 2$ ，Willmore 能量定义为

$$E(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \kappa^2 \, d\mathcal{H}^{d-1},$$

当 $d = 2$ 时，这一演化律通常称为弹性流。为推导 Willmore 流，需要计算 $E(\Gamma)$ 的第一变分；下述引理给出其表达式。这里沿用 §2.4 中的记号与约定。

引理 128 设 $\mathcal{G}_T$ 是闭的、可定向的 C^4 演化超曲面。则

$$\frac{d}{dt} E(\Gamma(t)) = \langle \Delta_s \kappa + \kappa |\nabla_s \vec{\nu}|^2 - \frac{1}{2} \kappa^3, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)}.$$

证明 由定理 32、引理 39(ii) 和注记 22(i)，计算得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\Gamma(t)) &= \langle \kappa, \partial_t^\square \kappa - \frac{1}{2} \kappa^2 \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} = \langle \kappa, \Delta_s \mathcal{V} + \mathcal{V} |\nabla_s \vec{\nu}|^2 - \frac{1}{2} \kappa^2 \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} \\ &= \langle \Delta_s \kappa + \kappa |\nabla_s \vec{\nu}|^2 - \frac{1}{2} \kappa^3, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)}, \end{aligned} \quad (164)$$

这里用到了 $\Gamma(t)$ 没有边界。 □

由此可知, 满足

$$\mathcal{V} = -\Delta_s \kappa - \kappa |\nabla_s \vec{\nu}|^2 + \frac{1}{2} \kappa^3 \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (165)$$

的演化超曲面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ 使 Willmore 能量以最快的速率减小。这一演化律称为 Willmore 流。因此, (165) 是 Willmore 能量的 L^2 梯度流。

9.2 Willmore 流的有限元逼近

首先考察 Barrett et al. (2007a, 2008d) 中的 Willmore 流有限元逼近, 以及按这些论文的方法构造的逼近。它们以下述 Willmore 流的形式为基础:

$$\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\nu} = -\Delta_s \kappa - \kappa |\nabla_s \vec{\nu}|^2 + \frac{1}{2} \kappa^3, \quad \kappa \vec{\nu} = \Delta_s \vec{\text{id}} \quad \text{在 } \Gamma(t). \quad (166)$$

比较 (75) 和 (166) 可知, 只要给出 $|\nabla_s \vec{\nu}|^2$ 的适当逼近, 便容易推广第 5 章的方法, 得到 Willmore 流的有限元逼近。当 $d = 2$ 时, $|\nabla_s \vec{\nu}|^2$ 化为 κ^2 , 参看引理 12(iv), 因此可采用 Barrett et al. (2007a, §2.3) 中的格式。在一般情形下, 用 (35) 中的一种逼近构造 Weingarten 映射 $\nabla_s \vec{\nu}$ 的离散逼近。于是, 对上述 Willmore 流的形式引入下述有限元逼近。设闭多面体超曲面 Γ^0 逼近 $\Gamma(0)$, 并设 $\kappa_{\Gamma^0}^0 \in V(\Gamma^0)$ 逼近其平均曲率。沿用时间区间分划 (40)。对于 $m = 0, \dots, M-1$, 先求 $W^{m+1} \in V(\Gamma^m)$ 或 $W^{m+1} \in V_c(\Gamma^m)$, 以逼近 Γ^m 上的 Weingarten 映射, 再求 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$, 使得

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \vec{\text{id}}}{\Delta t_m}, \chi \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h &= \langle \nabla_s \kappa^{m+1}, \nabla_s \chi \rangle_{\Gamma^m} - \frac{1}{2} \langle (\kappa_{\Gamma^m}^m)^2 \kappa^{m+1}, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h \\ &= -\langle \kappa_{\Gamma^m}^m |W^{m+1}|^2, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \end{aligned} \quad (167a)$$

$$\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h + \langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (167b)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 和 $\kappa_{\Gamma^{m+1}}^{m+1} = \kappa^{m+1} \circ (\vec{X}^{m+1})^{-1} \in V(\Gamma^{m+1})$ 。例如, 定义 W^{m+1} 时, 可从 (35) 中选取一种形式, 它以 Γ^m 为基础, 并可能还用到 $\kappa_{\Gamma^m}^m$ 或 $\vec{\kappa}^m = \vec{\pi}_{\Gamma^m}[\kappa_{\Gamma^m}^m \vec{\omega}^m]$ 。

定理 129 设 Γ^m 满足假设 64(i), 并给定 $\kappa_{\Gamma^m}^m \in V(\Gamma^m)$ 以及 $W^{m+1} \in V(\Gamma^m)$ 或 $W^{m+1} \in V_c(\Gamma^m)$ 。则 (167) 有唯一解 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$ 。

证明 证明与定理 86 相仿。 □

注记 130

(i) 仿照 §5.3, 也可考察格式 (167) 的半离散形式, 它满足定理 88(iii)。

- (ii) 仿照 §5.5, 可考察减少切向运动或采用诱导切向运动的 (167) 的变体。
- (iii) 在 (167) 的每个时间层产生的离散线性方程组, 与 (76) 所产生的方程组十分相近。例如, 可借助 UMFPAK 这样的稀疏分解软件包求解, 参看 Davis (2004)。

9.3 Willmore 流的稳定逼近

遗憾的是, 对于 (166) 的全离散逼近 (167), 似乎无法证明稳定性。不过, 重要论文 Dziuk (2008) 引入了一种稳定的 Willmore 流半离散有限元逼近。该离散采用 Willmore 能量第一变分的另一种表达形式, 由此得到 Willmore 流的弱形式。为推导这一弱形式, 先证明下述结论, 其思路来自 Dziuk (2008, 引理 3)。

引理 131 设 $\mathcal{G}_T$ 是闭的、可定向的 C^3 演化超曲面。设 $\vec{\mathcal{V}}$ 是由 $\mathcal{G}_T$ 的整体参数化诱导的速度场。则

$$\frac{d}{dt} E(\Gamma(t)) = - \left\langle \frac{1}{2} |\vec{\mathcal{Z}}|^2 + \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{Z}}, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}} \right\rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \nabla_s \vec{\mathcal{Z}}, 2 D_s(\vec{\mathcal{V}}) - \nabla_s \vec{\mathcal{V}} \right\rangle_{\Gamma(t)},$$

其中 $D_s(\vec{\mathcal{V}})$ 为形变率张量, 参看定义 25(iv)。

证明 由定义 11(iii) 和定理 32 可知

$$\frac{d}{dt} E(\Gamma(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle |\vec{\mathcal{Z}}|^2, 1 \rangle_{\Gamma(t)} = \langle \vec{\mathcal{Z}}, \partial_t^\circ \vec{\mathcal{Z}} \rangle_{\Gamma(t)} + \frac{1}{2} \left\langle |\vec{\mathcal{Z}}|^2, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}} \right\rangle_{\Gamma(t)}. \quad (168)$$

现在稍加修改 Dziuk (2008, 引理 3) 的证明, 以计算项 $\langle \vec{\mathcal{Z}}, \partial_t^\circ \vec{\mathcal{Z}} \rangle_{\Gamma(t)}$ 。

设 $\vec{x} : \Upsilon \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是定义 25(i) 所述的 $\mathcal{G}_T$ 的整体参数化。对于给定的 $\vec{\eta}_0 \in [C^1(\Upsilon)]^d$, 以下式定义 $\vec{\eta} : \mathcal{G}_T \rightarrow \mathbb{R}^d$:

$$\vec{\eta}(\vec{x}(\vec{z}, t), t) = \vec{\eta}_0(\vec{z}) \quad \text{对所有} \quad \forall (\vec{z}, t) \in \Upsilon \times [0, T], \quad (169)$$

即 $\vec{\eta}$ 的值随映射 $\vec{x}$ 输运。由定义 28(i) 可知

$$\partial_t^\circ \vec{\eta} = \vec{0} \quad \text{在 } \mathcal{G}_T. \quad (170)$$

由注记 22(iv)、定义 11(iii) 以及稠密性论证, 有

$$\langle \vec{\mathcal{Z}}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d, \quad (171)$$

这里用到了 $\Gamma(t)$ 是闭的。对 (171) 关于 t 求导, 利用定理 32 和 (170), 得到

$$\langle \partial_t^\circ \vec{\varepsilon}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\eta}, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}} \right\rangle_{\Gamma(t)} + \frac{d}{dt} \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma(t)} = 0. \quad (172)$$

由引理 9(ii)、定理 32、引理 38(iii) 以及 (170), 计算得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma(t)} &= \frac{d}{dt} \langle \nabla_s \cdot \vec{\eta}, 1 \rangle_{\Gamma(t)} \\ &= \left\langle \nabla_s \cdot \vec{\eta}, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}} \right\rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \nabla_s \vec{\eta}, \nabla_s \vec{\mathcal{V}} - 2 D_s(\vec{\mathcal{V}}) \right\rangle_{\Gamma(t)}. \end{aligned} \quad (173)$$

将 (172) 与 (173) 合并, 再取 $\vec{\eta} = \vec{\varepsilon}$, 得到

$$\langle \partial_t^\circ \vec{\varepsilon}, \vec{\varepsilon} \rangle_{\Gamma(t)} = - \left\langle |\vec{\varepsilon}|^2 + \nabla_s \cdot \vec{\varepsilon}, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}} \right\rangle_{\Gamma(t)} - \left\langle \nabla_s \vec{\varepsilon}, \nabla_s \vec{\mathcal{V}} - 2 D_s(\vec{\mathcal{V}}) \right\rangle_{\Gamma(t)}.$$

结合 (168), 即得所需结论。□

由引理 131 得到 Willmore 流的如下弱形式。给定闭超曲面 $\Gamma(0)$, 求演化超曲面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ 及其整体参数化和诱导速度场 $\vec{\mathcal{V}}$, 并求 $\vec{\varepsilon} \in [L^2(\mathcal{G}_T)]^d$, 使得对几乎处处的 $t \in (0, T)$, 所求的 $(\vec{\mathcal{V}}(\cdot, t), \vec{\varepsilon}(\cdot, t)) \in [L^2(\Gamma(t))]^d \times [H^1(\Gamma(t))]^d$ 满足

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\mathcal{V}}, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma(t)} &= \langle \nabla_s \vec{\varepsilon}, \nabla_s \vec{\chi} - 2 D_s(\vec{\chi}) \rangle_{\Gamma(t)} + \langle \nabla_s \cdot \vec{\varepsilon}, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle |\vec{\varepsilon}|^2, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \vec{\chi} \in [H^1(\Gamma(t))]^d, \end{aligned} \quad (174a)$$

$$\langle \vec{\varepsilon}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d, \quad (174b)$$

这里也用到了稠密性论证。

注记 132 (与 Dziuk (2008) 的比较) 按本文的记号, 有 $\nabla_s \vec{\chi} = (\nabla_\Gamma \vec{\chi})^\top$, 其中 $\nabla_\Gamma \vec{\chi}$ 按 Dziuk (2008, (2.4)) 定义。此外, 本文的记号满足 $D_s(\vec{\chi}) = \frac{1}{2} P_\Gamma D_\Gamma(\vec{\chi}) P_\Gamma$; 这里沿用定义 5(vii), 而 $D_\Gamma(\vec{\chi}) = \nabla_\Gamma \vec{\chi} + (\nabla_\Gamma \vec{\chi})^\top$ 按 Dziuk (2008, (3.14)) 定义。因此, 由注记 6(v) 和引理 9(i) 容易得到: 对于所有 $\vec{f}, \vec{\chi} \in [H^1(\Gamma(t))]^d$, 均有 $2 \nabla_s \vec{f} : D_s(\vec{\chi}) = \nabla_\Gamma \vec{f} : D_\Gamma(\vec{\chi}) \nabla_\Gamma \text{id}$ 。由此可知, (174) 与 Dziuk (2008, Problem 2) 一致。

下面说明弱形式 (174) 与强形式 (166) 的联系。

引理 133 (174) 的充分光滑解也是 Willmore 流强形式 (166) 的解。

证明 首先, 由 (174b) 和注记 22(iv) 可知 $\vec{\varepsilon} = \varkappa \vec{\nu}$ 且 (166) 中的第二个方程成立。

其次, 由定义 5(vii)、注记 6(v)、引理 7(iii) 和引理 12(ii), 得到

$$\nabla_s \vec{\varepsilon} : (\nabla_s \vec{\chi} - 2 D_s(\vec{\chi})) = (\vec{\nu} \otimes \nabla_s \varkappa) : \nabla_s \vec{\chi} - \varkappa \nabla_s \vec{\nu} : \nabla_s \vec{\chi}.$$

于是, 由注记 22(i)、(iii) 以及引理 7(ii)、(iii), 可将 (174a) 右端的第一项改写为

$$\langle \nabla_s \vec{\kappa}, \nabla_s \vec{\chi} - 2D_s(\vec{\chi}) \rangle_{\Gamma(t)} = \langle \kappa \Delta_s \vec{\nu} - (\Delta_s \kappa) \vec{\nu}, \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)}. \quad (175)$$

此外, 由定义 5(ii) 和引理 13(i) 可知 $\nabla_s \cdot \vec{\kappa} = \nabla_s \cdot (\kappa \vec{\nu}) = \kappa \nabla_s \cdot \vec{\nu} = -\kappa^2$ 。因此, 利用引理 7(i) 和定理 21, 从 (174a) 右端的第二项、第三项得到

$$\begin{aligned} \langle \nabla_s \cdot \vec{\kappa} + \frac{1}{2} |\vec{\kappa}|^2, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)} &= -\frac{1}{2} \langle \kappa^2, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)} \\ &= \langle \kappa \nabla_s \kappa, \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)} + \frac{1}{2} \langle \kappa^3, \vec{\chi} \cdot \vec{\nu} \rangle_{\Gamma(t)}. \end{aligned} \quad (176)$$

将 (174a)、(175) 和 (176) 合并, 得到

$$\vec{\nu} = (-\Delta_s \kappa + \frac{1}{2} \kappa^3) \vec{\nu} + \kappa (\Delta_s \vec{\nu} + \nabla_s \kappa) = (-\Delta_s \kappa - \kappa |\nabla_s \vec{\nu}|^2 + \frac{1}{2} \kappa^3) \vec{\nu}, \quad (177)$$

这里用到了引理 16。由此即得 (166) 中的第一个关系式。 $\square$

下面引入 (174) 的自然半离散形式。给定闭多面体超曲面 $\Gamma^h(0)$, 求演化多面体超曲面 $\mathcal{G}_T^h$ 及其诱导速度 $\vec{\mathcal{V}}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$, 并求 $\vec{\kappa}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$, 即对于所有 $t \in [0, T]$, 均有 $(\vec{\mathcal{V}}^h(\cdot, t), \vec{\kappa}^h(\cdot, t)) \in \underline{V}(\Gamma^h(t)) \times \underline{V}(\Gamma^h(t))$, 使得对所有 $t \in (0, T]$ 均满足

$$\begin{aligned} \langle \vec{\mathcal{V}}^h, \vec{\chi} \rangle_{\Gamma^h(t)}^h &= \langle \nabla_s \vec{\kappa}^h, \nabla_s \vec{\chi} - 2D_s(\vec{\chi}) \rangle_{\Gamma^h(t)} + \langle \nabla_s \cdot \vec{\kappa}^h, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \rangle_{\Gamma^h(t)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle |\vec{\kappa}^h|^2, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \rangle_{\Gamma^h(t)}^h \quad \forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \end{aligned} \quad (178a)$$

$$\langle \vec{\kappa}^h, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \quad (178b)$$

这里沿用引理 73 中 $\Gamma^h(t)$ 上的 D_s 的定义。

下面证明稳定性定理。

定理 134 设 $(\mathcal{G}_T^h, \vec{\kappa}^h)$ 是 (178) 的解, 并设 $\vec{\kappa}^h \in \underline{V}_T(\mathcal{G}_T^h)$ 。则

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(|\vec{\kappa}^h|_{\Gamma^h(t)}^h \right)^2 = - \left(|\vec{\mathcal{V}}^h|_{\Gamma^h(t)}^h \right)^2 \leq 0.$$

证明 仿照引理 131 的证明。与 (170) 类似, 将 (178b) 中的检验函数 $\vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 延拓为 $\vec{\eta} \in \underline{V}_T(\mathcal{G}_T^h)$, 使得在 $\mathcal{G}_T^h$ 上有 $\partial_t^{\circ, h} \vec{\eta} = \vec{0}$ 。对 (178b) 求时间导数, 利用定理 70 和引理 73(iii), 得到

$$\begin{aligned} \langle \partial_t^{\circ, h} \vec{\kappa}^h, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^h(t)}^h &+ \langle \vec{\kappa}^h \cdot \vec{\eta}, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h \rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \langle \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h, \nabla_s \cdot \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^h(t)} \\ &+ \langle \nabla_s \vec{\mathcal{V}}^h, \nabla_s \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^h(t)} - 2 \langle D_s(\vec{\mathcal{V}}^h), \nabla_s \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^h(t)} = 0. \end{aligned} \quad (179)$$

在 (179) 中取 $\vec{\eta} = \vec{\kappa}^h$, 在 (178a) 中取 $\vec{\chi} = \vec{\mathcal{V}}^h$, 得到

$$\left\langle \partial_t^{\circ, h} \vec{\kappa}^h, \vec{\kappa}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \frac{1}{2} \left\langle |\vec{\kappa}^h|^2, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \vec{\mathcal{V}}^h, \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = 0.$$

再由定理 70(ii) 和 (16) 即得所需结论. $\square$

注记 135

- (i) 当 $d = 2$ 时, (178) 的误差分析见 Deckelnick and Dziuk (2009)。
- (ii) Dziuk (2008, Problem 3) 提出的 (178) 的版本不采用质量集中。然而, (178) 的两个版本都没有 (167) 所具有的良好网格性质。这是因为网格几乎只沿法向移动, 通常会使网格质量恶化。事实上, (178a) 逼近 (174a), 而后者是

$$\vec{\mathcal{V}} = \left[-\Delta_s \varkappa - \varkappa |\nabla_s \vec{\nu}|^2 + \frac{1}{2} \varkappa^3 \right] \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma(t),$$

的弱形式, 这里用到了 (177)。

下面推导一种弱形式, 使相应的半离散逼近既稳定, 又具有良好的网格性质。关键之一是保证下式成立:

$$\langle \varkappa \vec{\nu}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d \quad (180)$$

这将使离散问题得到良好的网格, 参看 §4.6。因此, 要在考虑约束 (180) 的同时, 计算 $\frac{1}{2} \langle \varkappa, \varkappa \rangle_{\Gamma(t)}$ 的时间导数。为此, 采用偏微分方程约束优化的变分方法, 参看例如 Hinze et al. (2009); Tröltzsch (2010), 并定义 Lagrange 泛函

$$L(\Gamma(t), \varkappa^*, \vec{y}) = \frac{1}{2} \langle \varkappa^*, \varkappa^* \rangle_{\Gamma(t)} - \langle \varkappa^* \vec{\nu}, \vec{y} \rangle_{\Gamma(t)} - \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{y} \right\rangle_{\Gamma(t)}, \quad (181)$$

其中 $\vec{y} \in [H^1(\Gamma(t))]^d$ 是对应于约束 (180) 的 Lagrange 乘子, 约束中的 $\varkappa$ 换为 $\varkappa^*$ 。此时须注意, $\varkappa^*(t)$ 是独立变量, 并非 $\Gamma(t)$ 的平均曲率 $\varkappa(t)$ 。下面分别计算 $L(\Gamma(t), \varkappa^*, \vec{y})$ 关于 $\Gamma(t)$ 、 $\varkappa^*$ 和 $\vec{y}$ 的变分。

为此, 对于任意 $\vec{\chi} \in [H^1(\Gamma(t))]^d$ 和任意 $\varepsilon \in \mathbb{R}$, 置

$$\Gamma_\varepsilon(t) = \vec{\Phi}(\Gamma(t), \varepsilon), \quad \text{其中 } \vec{\Phi}(\cdot, \varepsilon) = \text{id}|_{\Gamma(t)} + \varepsilon \vec{\chi}. \quad (182)$$

对于 $\varepsilon_0 > 0$, 考察定义在 $\bigcup_{\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]} (\Gamma_\varepsilon(t) \times \{\varepsilon\})$ 上的光滑函数 f 。仿照定义 28(i), 定义

$$(\partial_\varepsilon^\circ f)(\vec{\Phi}(\vec{z}, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} f(\vec{\Phi}(\vec{z}, \varepsilon), \varepsilon) \quad \forall (\vec{z}, \varepsilon) \in \Gamma(t) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], \quad (183)$$

并注意到

$$\partial_\varepsilon^\circ f = \left(\frac{d}{d\varepsilon} f(\vec{\Phi}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\vec{\Phi}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - f}{\varepsilon} \quad \text{在 } \Gamma(t). \quad (184)$$

以下与 §2.4 类似, 常将 $\Gamma_\varepsilon(t) \times \{\varepsilon\}$ 与 $\Gamma_\varepsilon(t)$ 视为同一函数, 从而也将 $(\Gamma_\varepsilon(t) \times \{\varepsilon\})|_{\varepsilon=0}$ 与 $\Gamma(t)$ 视为同一函数. 由定理 32 的直接对应形式可知, $\langle f, 1 \rangle_{\Gamma(t)}$ 的第一变分为

$$\left[\frac{\delta}{\delta \Gamma} \langle f, 1 \rangle_{\Gamma(t)} \right] (\vec{\chi}) = \left(\frac{d}{d\varepsilon} \langle f, 1 \rangle_{\Gamma_\varepsilon(t)} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \langle \partial_\varepsilon^\circ f + f \nabla_s \cdot \vec{\chi}, 1 \rangle_{\Gamma(t)}. \quad (185)$$

此外, 若 $\vec{\nu}_\varepsilon$ 为 $\Gamma_\varepsilon(t)$ 上的单位法向量, 与 $\Gamma(t)$ 上的 $\vec{\nu}$ 对应, 则由引理 37(i) 的直接对应形式可知

$$\left[\frac{\delta}{\delta \Gamma} \vec{\nu} \right] (\vec{\chi}) = (\partial_\varepsilon^\circ \vec{\nu}_\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = -(\nabla_s \vec{\chi})^\top \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma(t). \quad (186)$$

仿照 (169), 对于任意 $\eta \in L^\infty(\Gamma(t))$, 可在 $\bigcup_{\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]} (\Gamma_\varepsilon(t) \times \{\varepsilon\})$ 上以下式定义 $\eta_{(\varepsilon)}$:

$$\eta_{(\varepsilon)}(\vec{\Phi}(\vec{z}, \varepsilon), \varepsilon) = \eta(\vec{z}) \quad \forall (\vec{z}, \varepsilon) \in \Gamma(t) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], \quad (187)$$

对于 $\vec{\eta} \in [L^\infty(\Gamma(t))]^d$ 亦作类似定义. 与 (170) 类似, 由上述延拓以及 (184) 得到

$$\left[\frac{\delta}{\delta \Gamma} \vec{\eta} \right] (\vec{\chi}) = (\partial_\varepsilon^\circ \vec{\eta}_{(\varepsilon)}) \Big|_{\varepsilon=0} = \vec{0} \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

特别地, 得到 (173) 的如下对应形式:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta}{\delta \Gamma} \langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} \right] (\vec{\chi}) &= \left(\frac{d}{d\varepsilon} \langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta}_{(\varepsilon)} \rangle_{\Gamma_\varepsilon(t)} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \langle \nabla_s \cdot \vec{\eta}, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)} + \langle \nabla_s \vec{\eta}, \nabla_s \vec{\chi} - 2 D_s(\vec{\chi}) \rangle_{\Gamma(t)}. \end{aligned} \quad (188)$$

下面考察 $L(\Gamma(t), \varkappa^*, \vec{y})$ 分别关于 $\Gamma(t)$ 、 $\varkappa^*$ 和 $\vec{y}$ 的变分. 具体而言, 对于所有 $\vec{\chi} \in [H^1(\Gamma(t))]^d$ 、 $\xi \in L^2(\Gamma(t))$ 和 $\vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d$, 置

$$\left[\frac{\delta}{\delta \Gamma} L \right] (\vec{\chi}) = \left(\frac{d}{d\varepsilon} L(\Gamma_\varepsilon(t), \varkappa_{(\varepsilon)}^*, \vec{y}_{(\varepsilon)}) \right) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (189a)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta \varkappa^*} L \right] (\xi) = \left(\frac{d}{d\varepsilon} L(\Gamma(t), \varkappa^* + \varepsilon \xi, \vec{y}) \right) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (189b)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta \vec{y}} L \right] (\vec{\eta}) = \left(\frac{d}{d\varepsilon} L(\Gamma(t), \varkappa^*, \vec{y} + \varepsilon \vec{\eta}) \right) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (189c)$$

其中 $\varkappa_{(\varepsilon)}^* \in L^2(\Gamma_\varepsilon(t))$ 和 $\vec{y}_{(\varepsilon)} \in [H^1(\Gamma_\varepsilon(t))]^d$ 通过输运 $\varkappa^* \in L^2(\Gamma(t))$ 和 $\vec{y} \in [H^1(\Gamma(t))]^d$

的值来定义, 方式如 (187) 所述; 这里的 $\vec{\chi}$ 由 (182) 给出。令变分 $\left[\frac{\delta}{\delta \vec{y}} L\right](\vec{\eta}) = 0$, 得到 (180), 但其中的 $\varkappa$ 换为 $\varkappa^*$ 。与原来的 (180) 比较, 可知 $\varkappa^* = \varkappa$ 。再令 $\left[\frac{\delta}{\delta \varkappa^*} L\right](\xi) = 0$, 利用 $\varkappa^* = \varkappa$, 得到

$$\varkappa = \vec{y} \cdot \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma(t). \quad (190)$$

最后, 令变分 $\left[\frac{\delta}{\delta \vec{\Gamma}} L\right](\vec{\chi}) = -\left\langle \vec{\nu} \cdot \vec{\nu}, \vec{\chi} \cdot \vec{\nu} \right\rangle_{\Gamma(t)}$, 利用 (185)、(186)、(188) 以及 $\varkappa^* = \varkappa$, 得到

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\nu} \cdot \vec{\nu}, \vec{\chi} \cdot \vec{\nu} \right\rangle_{\Gamma(t)} &= \langle \nabla_s \vec{y}, \nabla_s \vec{\chi} - 2 D_s(\vec{\chi}) \rangle_{\Gamma(t)} + \langle \nabla_s \cdot \vec{y}, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)} \\ &\quad - \left\langle \varkappa \left(\frac{1}{2} \varkappa - \vec{y} \cdot \vec{\nu} \right), \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma(t)} - \left\langle \varkappa \vec{y}, (\nabla_s \vec{\chi})^\top \vec{\nu} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\ &\quad \forall \vec{\chi} \in [H^1(\Gamma(t))]^d. \end{aligned} \quad (191)$$

因此, 得到如下弱形式。给定闭超曲面 $\Gamma(0)$, 求演化超曲面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ 及其整体参数化和诱导速度场 $\vec{\nu}$, 并求 $\varkappa \in L^2(\mathcal{G}_T)$ 和 $\vec{y} \in [L^2(\mathcal{G}_T)]^d$, 使得对几乎处处的 $t \in (0, T)$, 所求的 $(\vec{\nu}(\cdot, t), \varkappa(\cdot, t), \vec{y}(\cdot, t)) \in [L^2(\Gamma(t))]^d \times L^2(\Gamma(t)) \times [H^1(\Gamma(t))]^d$ 满足 (191)、(190) 和 (180)。

注记 136

- (i) 利用 Barrett et al. (2017d, Appendix A) 中的方法, 可仿照引理 133 证明: 上述弱形式的充分光滑解也是强形式 (166) 的解。
- (ii) 显然, 利用 (190), 可从这一弱形式的 (191) 和 (180) 中消去 $\varkappa$ 。

下面考察 (191)、(190) 和 (180) 的离散对应。先引入 (181) 的离散对应:

$$L^h(\Gamma^h(t), \kappa^h, \vec{Y}^h) = \frac{1}{2} \langle \kappa^h, \kappa^h \rangle_{\Gamma^h(t)}^h - \left\langle \kappa^h \vec{\nu}^h, \vec{Y}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h - \left\langle \nabla_s \vec{\text{id}}, \nabla_s \vec{Y}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}, \quad (192)$$

其中 $\vec{Y}^h(\cdot, t) \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 是对应于约束 $\kappa^h(\cdot, t) \in V(\Gamma^h(t))$ 的 Lagrange 乘子, 该约束满足

$$\langle \kappa^h \vec{\nu}^h, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \nabla_s \vec{\text{id}}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)). \quad (193)$$

令 $\left[\frac{\delta}{\delta \vec{Y}^h} L^h\right](\vec{\eta}) = 0$, 得到 (193)。令 $\left[\frac{\delta}{\delta \kappa^h} L^h\right](\xi) = 0$, 得到

$$\left\langle \kappa^h - \vec{Y}^h \cdot \vec{\nu}^h, \xi \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = 0 \quad \forall \xi \in V(\Gamma^h(t)). \quad (194)$$

最后, 需要计算 $L^h(\Gamma^h(t), \kappa^h, \vec{Y}^h)$ 关于 $\Gamma^h(t)$ 的变分。为此, 给出 (182) 的如下离散

对应: 对于任意 $\vec{\chi} \in V(\Gamma^h(t))$ 和任意 $\varepsilon \in \mathbb{R}$, 置

$$\Gamma_\varepsilon^h(t) = \vec{\Phi}^h(\Gamma^h(t), \varepsilon), \quad \text{其中 } \vec{\Phi}^h(\cdot, \varepsilon) = \text{id}|_{\Gamma^h(t)} + \varepsilon \vec{\chi}.$$

并定义 $\partial_\varepsilon^{\circ, h}$ 为 (183) 的离散对应。仿照定理 70(ii), 有

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta}{\delta \Gamma^h} \left\langle \kappa^h, \vec{Y}^h \cdot \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \right] (\vec{\chi}) &= \left(\frac{d}{d\varepsilon} \left\langle \kappa_{(\varepsilon)}^h, \vec{Y}_{(\varepsilon)}^h \cdot \vec{\nu}_\varepsilon^h \right\rangle_{\Gamma_\varepsilon^h(t)}^h \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \left(\left\langle \kappa_{(\varepsilon)}^h, \vec{Y}_{(\varepsilon)}^h \cdot \partial_\varepsilon^{\circ, h} \vec{\nu}_\varepsilon^h \right\rangle_{\Gamma_\varepsilon^h(t)}^h \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \left\langle \kappa^h \vec{Y}^h \cdot \vec{\nu}^h, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\ &= \left\langle \kappa^h, \vec{Y}^h \cdot \left[\frac{\delta}{\delta \Gamma^h} \vec{\nu}^h \right] (\vec{\chi}) \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \kappa^h \vec{Y}^h \cdot \vec{\nu}^h, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h, \end{aligned} \quad (195)$$

其中 $\kappa_{(\varepsilon)}^h$ 和 $\vec{Y}_{(\varepsilon)}^h$ 仿照 (187), 借助映射 $\vec{\Phi}^h$ 定义, 而 $\vec{\nu}_\varepsilon^h$ 为 $\Gamma_\varepsilon^h(t)$ 上的单位法向量。因此, 令 变 分 $\left[\frac{\delta}{\delta \Gamma^h} L^h \right] (\vec{\chi}) = - \left\langle \vec{\nu}^h \cdot \vec{\omega}^h, \vec{\chi} \cdot \vec{\omega}^h \right\rangle_{\Gamma(t)}^h$, 利用 (195)、对于 $\Gamma^h(t)$ 上的 $\vec{\nu}^h$ 的 (186) 的离散对应 (可与引理 72 比较), 以及对于 $\Gamma^h(t)$ 的 (188), 得到

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\nu}^h \cdot \vec{\omega}^h, \vec{\chi} \cdot \vec{\omega}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h &= \left\langle \nabla_s \vec{Y}^h, \nabla_s \vec{\chi} - 2 D_s(\vec{\chi}) \right\rangle_{\Gamma^h(t)} + \left\langle \nabla_s \cdot \vec{Y}^h, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} \\ &\quad - \left\langle \kappa^h \left(\frac{1}{2} \kappa^h - \vec{Y}^h \cdot \vec{\nu}^h \right), \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h - \left\langle \kappa^h \vec{Y}^h, (\nabla_s \vec{\chi})^\top \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\ &\quad \forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)). \end{aligned} \quad (196)$$

因此, 得到 (191)、(190) 和 (180) 的如下半离散有限元逼近。给定闭多面体超曲面 $\Gamma^h(0)$, 求演化多面体超曲面 $\mathcal{G}_T^h$ 及其诱导速度 $\vec{\mathcal{V}}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$, 并求 $\kappa^h \in V(\mathcal{G}_T^h)$ 、 $\vec{Y}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$, 即对所有 $t \in [0, T]$ 均有 $(\vec{\mathcal{V}}^h(\cdot, t), \kappa^h(\cdot, t), \vec{Y}^h(\cdot, t)) \in \underline{V}(\Gamma^h(t)) \times V(\Gamma^h(t)) \times \underline{V}(\Gamma^h(t))$, 使得对所有 $t \in (0, T]$, (196)、(194) 和 (193) 均成立。

注记 137

- (i) 仿照注记 136(ii), 利用 (194), 可从该半离散有限元逼近的 (196) 和 (193) 中消去 κ^h 。
- (ii) 格式 (196)、(194) 和 (193) 满足定理 88(iii)。

有下述稳定性结论。

定理 138 设 $(\mathcal{G}_T^h, \kappa^h, \vec{Y}^h)$ 是 (196)、(194) 和 (193) 的解, 并设 $\kappa^h \in V_T(\mathcal{G}_T^h)$ 。则

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(\left| \kappa^h \right|_{\Gamma^h(t)}^h \right)^2 = - \left(\left| \vec{\nu}^h \cdot \vec{\omega}^h \right|_{\Gamma^h(t)}^h \right)^2 \leq 0.$$

证明 仿照 (179), 将 (193) 中的检验函数 $\vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 延拓为 $\vec{\eta} \in \underline{V}_T(\mathcal{G}_T^h)$, 使得在 $\mathcal{G}_T^h$ 上有 $\partial_t^{\circ,h} \vec{\eta} = \vec{0}$. 对 (193) 求时间导数, 利用定理 70 和引理 73(iii), 得到

$$\begin{aligned} & \left\langle \partial_t^{\circ,h} \kappa^h, \vec{\nu}^h \cdot \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \kappa^h \partial_t^{\circ,h} \vec{\nu}^h, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \kappa^h \vec{\nu}^h \cdot \vec{\eta}, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\ & + \left\langle \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h, \nabla_s \cdot \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} + \left\langle \nabla_s \vec{\mathcal{V}}^h, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} - 2 \left\langle D_s(\vec{\mathcal{V}}^h), \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0. \end{aligned} \quad (197)$$

在 (197) 中取 $\vec{\eta} = \vec{Y}^h$, 在 (196) 中取 $\vec{\chi} = \vec{\mathcal{V}}^h$, 再由 (194)、(19) 和引理 72, 得到

$$\left\langle \partial_t^{\circ,h} \kappa^h, \kappa^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \frac{1}{2} \left\langle |\kappa^h|^2, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \vec{\mathcal{V}}^h \cdot \vec{\omega}^h, \vec{\mathcal{V}}^h \cdot \vec{\omega}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = 0.$$

最后, 由定理 70(ii) 和 (16) 即得所需结论. $\square$

下面给出 (196)、(194) 和 (193) 的全离散形式, 这里仍用到 (19).

设闭多面体超曲面 Γ^0 逼近 $\Gamma(0)$, 并设 $\kappa_{\Gamma^0}^0 \in V(\Gamma^0)$ 和 $\vec{Y}_{\Gamma^0}^0 \in \underline{V}(\Gamma^0)$ 分别逼近其平均曲率和平均曲率向量. 沿用时间区间分划 (40). 对于 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}, \vec{Y}^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m) \times \underline{V}(\Gamma^m)$, 使得

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \vec{\text{id}}}{\Delta t_m} \cdot \vec{\omega}^m, \vec{\chi} \cdot \vec{\omega}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \left\langle \nabla_s \vec{Y}^{m+1}, \nabla_s \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m} \\ & = - \left\langle \kappa_{\Gamma^m}^m \left(\frac{1}{2} \kappa_{\Gamma^m}^m - \vec{Y}_{\Gamma^m}^m \cdot \vec{\nu}^m \right), \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \left\langle \kappa_{\Gamma^m}^m \vec{Y}_{\Gamma^m}^m, (\nabla_s \vec{\chi})^\top \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h \\ & + \left\langle \nabla_s \cdot \vec{Y}_{\Gamma^m}^m, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m} - 2 \left\langle \nabla_s \vec{Y}_{\Gamma^m}^m, D_s(\vec{\chi}) \right\rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^m), \end{aligned} \quad (198a)$$

$$\kappa^{m+1} = \pi_{\Gamma^m} [\vec{Y}^{m+1} \cdot \vec{\omega}^m], \quad (198b)$$

$$\left\langle \kappa^{m+1} \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (198c)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 、 $\kappa_{\Gamma^{m+1}}^{m+1} = \kappa^{m+1} \circ (\vec{X}^{m+1})^{-1} \in V(\Gamma^{m+1})$ 和 $\vec{Y}_{\Gamma^{m+1}}^{m+1} = \vec{Y}^{m+1} \circ (\vec{X}^{m+1})^{-1} \in \underline{V}(\Gamma^{m+1})$. 有下述结论.

定理 139 设 Γ^m 满足假设 64(i), 并设 $\kappa_{\Gamma^m}^m \in V(\Gamma^m)$ 和 $\vec{Y}_{\Gamma^m}^m \in \underline{V}(\Gamma^m)$. 则 (198) 有唯一解 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}, \vec{Y}^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m) \times \underline{V}(\Gamma^m)$.

证明 证明与定理 86 十分类似. 考察齐次方程组

$$\left\langle \vec{X} \cdot \omega^m, \vec{\chi} \cdot \vec{\omega}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \Delta t_m \left\langle \nabla_s \vec{Y}, \nabla_s \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^m), \quad (199a)$$

$$\kappa - \pi_{\Gamma^m} [\vec{Y} \cdot \vec{\omega}^m] = 0, \quad (199b)$$

$$\left\langle \kappa \vec{\nu}^m, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m}^h + \left\langle \nabla_s \vec{X}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m). \quad (199c)$$

的解 $(\vec{X}, \kappa, \vec{Y}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m) \times \underline{V}(\Gamma^m)$ 。在 (199a) 中取 $\vec{\chi} = \vec{Y} \in \underline{V}(\Gamma^m)$ ，在 (199c) 中取 $\vec{\eta} = \vec{X} \in \underline{V}(\Gamma^m)$ ，由 (19) 和 (199b) 得到

$$\left| \nabla_s \vec{X} \right|_{\Gamma^m}^2 + \Delta t_m \left| \nabla_s \vec{Y} \right|_{\Gamma^m}^2 = 0.$$

由此可知，存在 $\vec{X}^c, \vec{Y}^c \in \mathbb{R}^d$ ，使得 $\vec{X} = \vec{X}^c$ ，且在 Γ^m 上有 $\vec{Y} = \vec{Y}^c$ 。因此，将 (199b) 代入 (199c)，由 (199) 和 (19) 得到

$$\left(\left| \vec{X}^c \cdot \vec{\omega}^m \right|_{\Gamma^m}^h \right)^2 + \left(\left| \vec{Y}^c \cdot \vec{\omega}^m \right|_{\Gamma^m}^h \right)^2 = 0,$$

即 $\vec{X}^c \cdot \vec{\omega}^m = \vec{Y}^c \cdot \vec{\omega}^m = 0$ 。再由假设 64(i) 可知 $\vec{X}^c = \vec{Y}^c = \vec{0}$ ，从而 $\kappa = 0$ 。 $\square$

注记 140 (稳定性) 遗憾的是，对于全离散格式 (198) 及其推广，似乎无法证明稳定性估计。对于 Dziuk 格式 (178) 的全离散逼近，也有同样的问题。

注记 141 (离散线性方程组) 沿用 §4.3 中的记号，(198) 在每个时间层需要求解的线性方程组可写为：求 $(\vec{Y}^{m+1}, \kappa^{m+1}, \delta \vec{X}^{m+1}) \in (\mathbb{R}^d)^K \times \mathbb{R}^K \times (\mathbb{R}^d)^K$ ，使得

$$\begin{pmatrix} A_{\Gamma^m} & 0 & -\frac{1}{\Delta t_m} \mathcal{M}_{\Gamma^m} \\ -\vec{N}_{\Gamma^m}^\top & M_{\Gamma^m} & 0 \\ 0 & \vec{N}_{\Gamma^m} & A_{\Gamma^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{Y}^{m+1} \\ \kappa^{m+1} \\ \delta \vec{X}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g}_{\Gamma^m} \\ 0 \\ -A_{\Gamma^m} \vec{X}^m \end{pmatrix}, \quad (200)$$

这里在记号上作了与 (46) 相似的混用。(200) 中各矩阵与向量的定义或由 (45) 给出，或直接由 (198) 得到。在实际计算中，可用 UMFPACK 这样的稀疏直接法高效求解线性方程组 (200)，参看 Davis (2004)。

9.4 具有自发曲率和面积差弹性效应的 Willmore 流

曲率能量对于囊泡和生物膜也十分重要。与许多膜弹性能量一样，膜的曲率进入弹性能量密度。不过，生物膜还受到其他效应的影响，下面加以讨论。最初的生物膜曲率能量模型已考虑膜在法向上可能具有的不对称性；例如，膜两侧的化学环境不同就可能造成这种不对称性。上下两侧的不对称性要求推广 Willmore 能量，Canham (1970) 和 Helfrich (1973) 引入的自发曲率模型便是一个例子。最简单的这种能量，其无量纲形式为

$$E_{\bar{\kappa}}(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\kappa - \bar{\kappa})^2 d\mathcal{H}^{d-1},$$

其中 $\bar{\kappa} \in \mathbb{R}$ 是给定的所谓自发曲率。生物膜由两层脂质组成，脂质分子数守恒。此外，脂质周围的化学环境会产生渗透压效应。这两种效应对膜的可能构形施加了约束。早

期的双层膜模型对此采取的处理方式，是对膜的总曲面面积和所围体积施加严格约束。由于分子难以在两层之间交换，每层的脂质总数分别守恒，从而两层之间会存在曲面面积差。其一阶近似由平均曲率在整个表面上的积分给出；这一点来自曲面面积的第一变分公式，参看 (36)。不同模型或对这一面积差施加严格约束，或对其偏离最优值的程度加以惩罚。后一种情形给出能量

$$E_{\bar{\kappa},\beta}(\Gamma) = E_{\bar{\kappa}}(\Gamma) + \frac{1}{2} \beta (\langle \kappa, 1 \rangle_{\Gamma} - M_0)^2 \quad (201)$$

其中 $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 、 $M_0 \in \mathbb{R}$ 为给定常数。以能量 (201) 为基础模型称为面积差弹性 (ADE) 模型，参看 Seifert (1997)。下面将引理 128 推广至 $E_{\bar{\kappa},\beta}(\Gamma(t))$ 。为简化记号，定义

$$A(t) = \langle \kappa, 1 \rangle_{\Gamma(t)} - M_0. \quad (202)$$

引理 142 设 $\mathcal{G}_T$ 是闭的、可定向的 C^4 演化超曲面。则

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E_{\bar{\kappa},\beta}(\Gamma(t)) \\ &= \langle \Delta_s \kappa + (\kappa - \bar{\kappa}) |\nabla_s \vec{\nu}|^2 - \frac{1}{2} (\kappa - \bar{\kappa})^2 \kappa + \beta A(t) (|\nabla_s \vec{\nu}|^2 - \kappa^2), \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)}. \end{aligned}$$

证明 将 (164) 推广至 $E_{\bar{\kappa}}(\Gamma(t))$ ，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\bar{\kappa}}(\Gamma(t)) &= \langle \kappa - \bar{\kappa}, \partial_t^\square \kappa - \frac{1}{2} (\kappa - \bar{\kappa}) \kappa \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} \\ &= \langle \kappa - \bar{\kappa}, \Delta_s \mathcal{V} + \mathcal{V} |\nabla_s \vec{\nu}|^2 - \frac{1}{2} (\kappa - \bar{\kappa}) \kappa \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} \\ &= \langle \Delta_s \kappa + (\kappa - \bar{\kappa}) |\nabla_s \vec{\nu}|^2 - \frac{1}{2} (\kappa - \bar{\kappa})^2 \kappa, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)}. \end{aligned} \quad (203)$$

再由定理 32 和引理 39(ii)，计算得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\langle \kappa, 1 \rangle_{\Gamma(t)} - M_0)^2 \right] &= A(t) \frac{d}{dt} \langle \kappa, 1 \rangle_{\Gamma(t)} = A(t) \langle \partial_t^\square \kappa - \kappa^2 \mathcal{V}, 1 \rangle_{\Gamma(t)} \\ &= A(t) \langle |\nabla_s \vec{\nu}|^2 - \kappa^2, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)}. \end{aligned}$$

将上式与 (203) 合并，再由 (201) 即得结论。 $\square$

因此，(201) 中 $E_{\bar{\kappa},\beta}(\Gamma(t))$ 的 L^2 梯度流为

$$\mathcal{V} = -\Delta_s \kappa - (\kappa - \bar{\kappa}) |\nabla_s \vec{\nu}|^2 + \frac{1}{2} (\kappa - \bar{\kappa})^2 \kappa - \beta A(t) (|\nabla_s \vec{\nu}|^2 - \kappa^2) \quad \text{在 } \Gamma(t). \quad (204)$$

根据以上讨论，保持体积和曲面面积的流也值得研究。当 $\beta = 0$ 时，同时保持体

积与曲面面积的流称为 Helfrich 流。为保持曲面面积与体积，考虑两个附加约束

$$\langle \varkappa, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \text{和} \quad \langle 1, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad (205)$$

这里分别用到了定理 32 和定理 33。具体而言，引入 Lagrange 乘子 $(\lambda_A(t), \lambda_V(t))^T \in \mathbb{R}^2$ ，将 (204) 写为 $\mathcal{V} = f$ ，并将 (204) 改为

$$\mathcal{V} = f + \lambda_A \varkappa + \lambda_V \quad \text{在 } \Gamma(t). \quad (206)$$

若 $(\lambda_A(t), \lambda_V(t))^T \in \mathbb{R}^2$ 满足下述对称方程组，则约束 (205) 成立：

$$\begin{pmatrix} \langle \varkappa, \varkappa \rangle_{\Gamma(t)} & \langle \varkappa, 1 \rangle_{\Gamma(t)} \\ \langle \varkappa, 1 \rangle_{\Gamma(t)} & \langle 1, 1 \rangle_{\Gamma(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_V \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \langle f, \varkappa \rangle_{\Gamma(t)} \\ \langle f, 1 \rangle_{\Gamma(t)} \end{pmatrix}. \quad (207)$$

注意，(207) 中的矩阵为对称半正定矩阵，且当且仅当 $\varkappa$ 为常数，即 $\Gamma(t)$ 为球面时，该矩阵奇异。若仅施加一个约束，则将对应于另一约束的 Lagrange 乘子置为零，并从 (207) 中删去相应方程。在有两个约束且 $\varkappa$ 不是常数时，(207) 等价于 $\lambda_A = - \left\langle f, \varkappa - \int_{\Gamma(t)} \varkappa \right\rangle_{\Gamma(t)} / \left| \varkappa - \int_{\Gamma(t)} \varkappa \right|_{\Gamma(t)}^2$ 并由 (207) 的第二个方程求得 λ_V 。这里， $\int_{\Gamma(t)} \varkappa$ 的定义见 (87)。

对有限元逼近 (167) 作相应修改，只须将 (167a) 换为

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \vec{\text{id}}}{\Delta t_m}, \chi \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h - \langle \nabla_s \kappa^{m+1}, \nabla_s \chi \rangle_{\Gamma^m} - \frac{1}{2} \langle (\kappa_{\Gamma^m}^m - \bar{\varkappa})^2 \kappa^{m+1}, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h \\ & - [\lambda_A^m]_+ \langle \kappa^{m+1}, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h \\ & = \langle g^m, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h + [\lambda_A^m]_- \langle \kappa_{\Gamma^m}^m, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h + \lambda_V^m \langle 1, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \end{aligned} \quad (208)$$

其中 $g^m \in V(\Gamma^m)$ 满足

$$\begin{aligned} \langle g^m, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h &= - \langle (\kappa_{\Gamma^m}^m - \bar{\varkappa}) |W^{m+1}|^2, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h - \beta A^m \langle |W^{m+1}|^2 - (\kappa_{\Gamma^m}^m)^2, \chi \rangle_{\Gamma^m}^h \\ & \quad \forall \chi \in V(\Gamma^m), \end{aligned}$$

$$A^m = \langle \kappa_{\Gamma^m}^m, 1 \rangle_{\Gamma^m}^h - M_0.$$

此外， $[\lambda_A^m]_{\pm} = \pm \max\{\pm \lambda_A^m, 0\}$ 以及 Lagrange 乘子 $(\lambda_A^m, \lambda_V^m)^T \in \mathbb{R}^2$ 满足对称方程组

$$\begin{pmatrix} \langle \kappa_{\Gamma^m}^m, \kappa_{\Gamma^m}^m \rangle_{\Gamma^m}^h & \langle \kappa_{\Gamma^m}^m, 1 \rangle_{\Gamma^m}^h \\ \langle \kappa_{\Gamma^m}^m, 1 \rangle_{\Gamma^m}^h & \langle 1, 1 \rangle_{\Gamma^m}^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_A^m \\ \lambda_V^m \end{pmatrix}$$

$$= - \left(\frac{\left\langle g^m + \frac{1}{2} (\kappa_{\Gamma^m}^m - \bar{\kappa})^2 \kappa_{\Gamma^m}^m, \kappa_{\Gamma^m}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h + |\nabla_s \kappa_{\Gamma^m}^m|_{\Gamma^m}^2}{\left\langle g^m + \frac{1}{2} (\kappa_{\Gamma^m}^m - \bar{\kappa})^2 \kappa_{\Gamma^m}^m, 1 \right\rangle_{\Gamma^m}^h} \right). \quad (209)$$

同样, (209) 中的矩阵为对称半正定矩阵, 且当且仅当 $\kappa_{\Gamma^m}^m$ 为常数时, 该矩阵奇异. 若仅施加一个约束, 同样将对应于另一约束的 Lagrange 乘子置为零, 并从 (209) 中删去相应方程. 此外, 适当修改后的定理 129 和注记 130 对这一修正格式仍然成立, 细节见 Barrett et al. (2008d).

下面将 §9.3 中 Willmore 流的稳定逼近推广至具有自发曲率和面积差效应的 Willmore 流. 作者在 Barrett et al. (2016b) 中将 Dziuk (2008) 的方法, 即 (178), 推广至 $\bar{\kappa}$ 和 β 非零的情形.

首先, 考察附加约束 (171) 下 $E_{\bar{\kappa}, \beta}(\Gamma(t))$ 的变分. 仿照 (181), 引入 Lagrange 泛函

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{\bar{\kappa}, \beta}(\Gamma(t), \vec{\kappa}^*, \vec{y}) &= \frac{1}{2} \left\langle |\vec{\kappa}^* - \bar{\kappa} \vec{\nu}|^2, 1 \right\rangle_{\Gamma(t)} + \frac{1}{2} \beta \left(\langle \vec{\kappa}^*, \vec{\nu} \rangle_{\Gamma(t)} - M_0 \right)^2 \\ &\quad - \langle \vec{\kappa}^*, \vec{y} \rangle_{\Gamma(t)} - \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{y} \right\rangle_{\Gamma(t)}, \end{aligned}$$

其中 $\vec{y}(\cdot, t) \in [H^1(\Gamma(t))]^d$ 为 (171) 的 Lagrange 乘子, 约束中的 $\vec{\kappa}(\cdot, t) \in [L^2(\Gamma(t))]^d$ 换为 $\vec{\kappa}^*(\cdot, t) \in [L^2(\Gamma(t))]^d$. 仿照 (189), 对于所有 $\vec{\chi} \in [H^1(\Gamma(t))]^d$, $\vec{\xi} \in [L^2(\Gamma(t))]^d$ 和 $\vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d$, 考察变分

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta}{\delta \Gamma} \widehat{L}_{\bar{\kappa}, \beta} \right] (\vec{\chi}) &= \left(\frac{d}{d\varepsilon} \widehat{L}_{\bar{\kappa}, \beta}(\Gamma_\varepsilon(t), \vec{\kappa}_{(\varepsilon)}^*, \vec{y}_{(\varepsilon)}) \right)_{|\varepsilon=0}, \\ \left[\frac{\delta}{\delta \vec{\kappa}^*} \widehat{L}_{\bar{\kappa}, \beta} \right] (\vec{\xi}) &= \left(\frac{d}{d\varepsilon} \widehat{L}_{\bar{\kappa}, \beta}(\Gamma(t), \vec{\kappa}^* + \varepsilon \vec{\xi}, \vec{y}) \right)_{|\varepsilon=0}, \\ \left[\frac{\delta}{\delta \vec{y}} \widehat{L}_{\bar{\kappa}, \beta} \right] (\vec{\eta}) &= \left(\frac{d}{d\varepsilon} \widehat{L}_{\bar{\kappa}, \beta}(\Gamma(t), \vec{\kappa}^*, \vec{y} + \varepsilon \vec{\eta}) \right)_{|\varepsilon=0}, \end{aligned}$$

其中 $\vec{\kappa}_{(\varepsilon)}^*(\cdot, t)$, $\vec{y}_{(\varepsilon)}(\cdot, t) \in [H^1(\Gamma_\varepsilon(t))]^d$ 按 (187) 的方式, 通过输运 $\vec{\kappa}^*$ 和 $\vec{y}$ 的值来定义. 令 $\left[\frac{\delta}{\delta \vec{y}} \widehat{L}_{\bar{\kappa}, \beta} \right] (\vec{\eta}) = 0$, 并与 (171) 比较, 得到 $\vec{\kappa}^* = \vec{\kappa}$. 此外, 令 $\left[\frac{\delta}{\delta \vec{\kappa}^*} \widehat{L}_{\bar{\kappa}, \beta} \right] (\vec{\xi}) = 0$ 和 $\langle \vec{\nu}, \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)} = - \left[\frac{\delta}{\delta \Gamma} \widehat{L}_{\bar{\kappa}, \beta} \right] (\vec{\chi})$, 利用 (185)、(186) 和 (188), 便得到 $\vec{\nu} = f \vec{\nu}$ 与引理 13(ii) 的如下弱形式. 其中 f 是 (204) 的右端; 对于没有自发曲率与 ADE 效应的情形, 可参看注记 135(ii). 给定闭超曲面 $\Gamma(0)$, 求演化超曲面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ 及其整体参数化和诱导速度场 $\vec{\nu}$, 并求 $\vec{\kappa} \in [L^2(\mathcal{G}_T)]^d$ 和 $\vec{y} \in [L^2(\mathcal{G}_T)]^d$, 使得对几乎处处的 $t \in (0, T)$, 所求的 $(\vec{\nu}(\cdot, t), \vec{\kappa}(\cdot, t), \vec{y}(\cdot, t)) \in [L^2(\Gamma(t))]^d \times [L^2(\Gamma(t))]^d \times [H^1(\Gamma(t))]^d$ 满足

$$\left\langle \vec{\nu}, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma(t)} = \langle \nabla_s \vec{y}, \nabla_s \vec{\chi} - 2 D_s(\vec{\chi}) \rangle_{\Gamma(t)} + \langle \nabla_s \cdot \vec{y}, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\langle \frac{1}{2} |\vec{\kappa} - \bar{\kappa} \vec{\nu}|^2 - \vec{\kappa} \cdot (\vec{y} - \beta A(t) \vec{\nu}), \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\
& + (\beta A(t) - \bar{\kappa}) \left\langle \vec{\kappa}, (\nabla_s \vec{\chi})^\top \vec{\nu} \right\rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \vec{\chi} \in [H^1(\Gamma(t))]^d, \quad (210a)
\end{aligned}$$

$$\left\langle \vec{\kappa} + (\beta A(t) - \bar{\kappa}) \vec{\nu} - \vec{y}, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \vec{\xi} \in [L^2(\Gamma(t))]^d, \quad (210b)$$

$$\langle \vec{\kappa}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d \quad (210c)$$

其中

$$A(t) = \langle \vec{\kappa}, \vec{\nu} \rangle_{\Gamma(t)} - M_0. \quad (210d)$$

注意, 若 $\bar{\kappa} = \beta = 0$, 则 $\vec{y} = \vec{\kappa}$, 从而系统 (210) 化为 (174)。

下面借助离散能量

$$E_{\bar{\kappa}, \beta}^h(\Gamma^h(t)) = \frac{1}{2} \left\langle |\vec{\kappa}^h - \bar{\kappa} \vec{\nu}^h|^2, 1 \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \frac{1}{2} \beta \left(\langle \vec{\kappa}^h, \vec{\nu}^h \rangle_{\Gamma^h(t)} - M_0 \right)^2 \quad (211)$$

在附加约束 (178b) 下的第一变分, 引入 (210) 的半离散形式。定义 Lagrange 泛函

$$\hat{L}_{\bar{\kappa}, \beta}^h(\Gamma^h(t), \vec{\kappa}^h, \vec{Y}^h) = E_{\bar{\kappa}, \beta}^h(\Gamma^h(t)) - \left\langle \vec{\kappa}^h, \vec{Y}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h - \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{Y}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)},$$

其中 $\vec{Y}^h(\cdot, t) \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 是 (178b) 的 Lagrange 乘子。仿照 (192), 对于 $\vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 令 $\left[\frac{\delta}{\delta \Gamma^h} \hat{L}_{\bar{\kappa}, \beta}^h \right](\vec{\chi}) = - \langle \vec{\nu}^h, \vec{\chi} \rangle_{\Gamma^h(t)}$, 对于 $\vec{\xi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 令 $\left[\frac{\delta}{\delta \vec{\kappa}^h} \hat{L}_{\bar{\kappa}, \beta}^h \right](\vec{\xi}) = 0$, 并对于 $\vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 令 $\left[\frac{\delta}{\delta \vec{Y}^h} \hat{L}_{\bar{\kappa}, \beta}^h \right](\vec{\eta}) = 0$ 。由 (195) 的对应形式, 对于 $\Gamma^h(t)$ 上的 $\vec{\nu}^h$ 的 (186) 的离散对应, 以及对于 $\Gamma^h(t)$ 的 (188), 得到 (210) 的如下半离散有限元逼近。给定闭多面体超曲面 $\Gamma^h(0)$, 求演化多面体超曲面 $\mathcal{G}_T^h$ 及其诱导速度 $\vec{\nu}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$, 并求 $\vec{\kappa}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$ 和 $\vec{Y}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$, 使得对所有 $t \in (0, T]$, 所求的 $(\vec{\nu}^h(\cdot, t), \vec{\kappa}^h(\cdot, t), \vec{Y}^h(\cdot, t)) \in \underline{V}(\Gamma^h(t)) \times \underline{V}(\Gamma^h(t)) \times \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 满足

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{\nu}^h, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h &= \left\langle \nabla_s \vec{Y}^h, \nabla_s \vec{\chi} - 2 D_s(\vec{\chi}) \right\rangle_{\Gamma^h(t)} + \left\langle \nabla_s \cdot \vec{Y}^h, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} \\
& - \left\langle \frac{1}{2} |\vec{\kappa}^h - \bar{\kappa} \vec{\nu}^h|^2 - \vec{\kappa}^h \cdot (\vec{Y}^h - \beta A^h(t) \vec{\nu}^h), \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\
& + (\beta A^h(t) - \bar{\kappa}) \left\langle \vec{\kappa}^h, (\nabla_s \vec{\chi})^\top \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \quad \forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \quad (212a)
\end{aligned}$$

$$\left\langle \vec{\kappa}^h + (\beta A^h(t) - \bar{\kappa}) \vec{\nu}^h - \vec{Y}^h, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = 0 \quad \forall \vec{\xi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \quad (212b)$$

$$\langle \vec{\kappa}^h, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \quad (212c)$$

其中

$$A^h(t) = \langle \vec{\kappa}^h, \vec{\nu}^h \rangle_{\Gamma^h(t)}^h - M_0. \quad (212d)$$

注意, 由 (212b) 和 (19) 可知, 在 $\Gamma^h(t)$ 上有 $\vec{\kappa}^h + (\beta A^h(t) - \bar{\kappa}) \vec{\omega}^h = \vec{Y}^h$ 。当然, 可以从 (212) 中消去 $\vec{\kappa}^h$ 。

下面对半离散格式 (212) 证明定理 134 的对应结论。

定理 143 设 $(\mathcal{G}_T^h, \vec{\kappa}^h, \vec{Y}^h)$ 是 (212) 的解, 并设 $\vec{\kappa}^h \in \underline{V}_T(\mathcal{G}_T^h)$ 。则

$$\frac{d}{dt} E_{\vec{\kappa}, \beta}^h(\Gamma^h(t)) = - \left(\left| \vec{\mathcal{V}}^h \right|_{\Gamma^h(t)}^h \right)^2 \leq 0. \quad (213)$$

证明 仿照定理 134 的证明, 对 (212c) 关于 t 求导, 得到 (179)。在 (179) 中取 $\vec{\eta} = \vec{Y}^h$, 得到

$$\begin{aligned} & \left\langle \partial_t^{\circ, h} \vec{\kappa}^h, \vec{Y}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \vec{\kappa}^h \cdot \vec{Y}^h, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h, \nabla_s \cdot \vec{Y}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\ & + \left\langle \nabla_s \vec{\mathcal{V}}^h, \nabla_s \vec{Y}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h - 2 \left\langle D_s(\vec{\mathcal{V}}^h), \nabla_s \vec{Y}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = 0. \end{aligned} \quad (214)$$

将取 $\vec{\chi} = \vec{\mathcal{V}}^h$ 时的 (212a) 与 (214) 合并, 由引理 72 和 (212b) 得到

$$\begin{aligned} & \left\langle \vec{\mathcal{V}}^h, \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \frac{1}{2} |\vec{\kappa}^h - \bar{\kappa} \vec{\nu}^h|^2 + \beta A^h(t) \vec{\kappa}^h \cdot \vec{\nu}^h, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\ & + (\beta A^h(t) - \bar{\kappa}) \left\langle \vec{\kappa}^h, \partial_t^{\circ, h} \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\ & = - \left\langle \partial_t^{\circ, h} \vec{\kappa}^h, \vec{Y}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = - \left\langle \partial_t^{\circ, h} \vec{\kappa}^h, \vec{\kappa}^h + (\beta A^h(t) - \bar{\kappa}) \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h. \end{aligned} \quad (215)$$

再由 (215)、(211)、(16)、定理 70 和 (212d), 得到所需的 (213)。这里用到了

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\left\langle \vec{\kappa}^h, \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h - M_0 \right)^2 \\ & = A^h(t) \left[\left\langle \partial_t^{\circ, h} \vec{\kappa}^h, \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \vec{\kappa}^h, \partial_t^{\circ, h} \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \vec{\kappa}^h \cdot \vec{\nu}^h, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \right]. \end{aligned}$$

□

下面给出半离散格式 (212) 的全离散形式。设闭多面体超曲面 Γ^0 逼近 $\Gamma(0)$, 并给定 $\vec{\kappa}_{\Gamma^0}^0, \vec{Y}_{\Gamma^0}^0 \in \underline{V}(\Gamma^0)$ 和 $A^0 \in \mathbb{R}$ 。对于 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $(\vec{X}^{m+1}, \vec{\kappa}^{m+1}, \vec{Y}^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times \underline{V}(\Gamma^m) \times \underline{V}(\Gamma^m)$, 使得

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m}, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m}^h = \left\langle \nabla_s \vec{Y}^{m+1}, \nabla_s \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m} + \left\langle \nabla_s \cdot \vec{Y}_{\Gamma^m}^m, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m} \\ & - 2 \left\langle \nabla_s \vec{Y}_{\Gamma^m}^m, D_s(\vec{\chi}) \right\rangle_{\Gamma^m} + (\beta A^m - \bar{\kappa}) \left\langle \vec{\kappa}_{\Gamma^m}^m, (\nabla_s \vec{\chi})^\top \vec{\nu}^m \right\rangle_{\Gamma^m}^h \end{aligned}$$

$$-\left\langle \frac{1}{2} |\vec{\kappa}_{\Gamma^m}^m - \bar{\kappa} \vec{\nu}^m|^2 - \vec{\kappa}_{\Gamma^m}^m \cdot (\vec{Y}_{\Gamma^m}^m - \beta A^m \vec{\nu}^m), \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m}^h$$

$$\forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^m), \quad (216a)$$

$$\vec{\kappa}^{m+1} = \vec{Y}^{m+1} - (\beta A^m - \bar{\kappa}) \vec{\omega}^m, \quad (216b)$$

$$\langle \vec{\kappa}^{m+1}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m}^h + \langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m) \quad (216c)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 、 $A^{m+1} = \langle \vec{\kappa}^{m+1}, \vec{\nu}^m \rangle_{\Gamma^m} - M_0$ 、 $\vec{\kappa}_{\Gamma^{m+1}}^{m+1} = \vec{\kappa}^{m+1} \circ (\vec{X}^{m+1})^{-1} \in \underline{V}(\Gamma^{m+1})$ 和 $\vec{Y}_{\Gamma^{m+1}}^{m+1} = \vec{Y}^{m+1} \circ (\vec{X}^{m+1})^{-1} \in \underline{V}(\Gamma^{m+1})$ 。当然，可以从 (216) 中消去 $\vec{\kappa}^{m+1}$ 。

定理 144 设 $\vec{\kappa}_{\Gamma^m}^m, \vec{Y}_{\Gamma^m}^m \in \underline{V}(\Gamma^m)$ 和 $A^m \in \mathbb{R}$ 。则 (216) 有唯一解

$$(\vec{X}^{m+1}, \vec{\kappa}^{m+1}, \vec{Y}^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times \underline{V}(\Gamma^m) \times \underline{V}(\Gamma^m)$$

证明 稍加修改定理 139 的证明即可。 $\square$

注记 145 (离散线性方程组) 仿照注记 141, (216) 在每个时间层需要求解的线性方程组可写为: 求 $(\vec{Y}^{m+1}, \vec{\kappa}^{m+1}, \delta \vec{X}^{m+1}) \in (\mathbb{R}^d)^K \times (\mathbb{R}^d)^K \times (\mathbb{R}^d)^K$, 使得

$$\begin{pmatrix} A_{\Gamma^m} & 0 & -\frac{1}{\Delta t_m} M_{\Gamma^m} \\ -M_{\Gamma^m} & M_{\Gamma^m} & 0 \\ 0 & M_{\Gamma^m} & A_{\Gamma^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{Y}^{m+1} \\ \vec{\kappa}^{m+1} \\ \delta \vec{X}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g}_{\Gamma^m} \\ -(\beta A^m - \bar{\kappa}) M_{\Gamma^m} \vec{\omega}^m \\ -A_{\Gamma^m} \vec{X}^m \end{pmatrix},$$

这一方程组可用 UMFPAK 这样的稀疏直接法高效求解, 参看 Davis (2004)。

与注记 135(ii) 一样, 半离散格式 (212) 及其全离散形式 (216) 都没有良好的网格性质。为得到具有良好网格性质的格式, 将半离散逼近 (196)、(194) 和 (193) 推广, 以考虑自发曲率和 ADE 效应。首先, 将弱形式 (191)、(190) 和 (180) 推广至包含自发曲率和 ADE 效应的情形。为此, 将 Lagrange 泛函 (181) 推广为

$$L_{\bar{\kappa}, \beta}(\Gamma(t), \kappa^*, \vec{y}) = \frac{1}{2} \langle \kappa^* - \bar{\kappa}, \kappa^* - \bar{\kappa} \rangle_{\Gamma(t)} + \frac{1}{2} \beta \left(\langle \kappa^*, 1 \rangle_{\Gamma(t)} - M_0 \right)^2$$

$$- \langle \kappa^* \vec{\nu}, \vec{y} \rangle_{\Gamma(t)} - \left\langle \nabla_s \vec{\text{id}}, \nabla_s \vec{y} \right\rangle_{\Gamma(t)}. \quad (217)$$

同样, 令变分 $\left[\frac{\delta}{\delta \vec{y}} L_{\bar{\kappa}, \beta} \right](\vec{\eta}) = 0$, 得到 (180), 但其中的 κ 换为 κ^* , 因而 $\kappa^* = \kappa$ 。令 $\left[\frac{\delta}{\delta \kappa^*} L_{\bar{\kappa}, \beta} \right](\xi) = 0$, 利用 $\kappa^* = \kappa$ 和 (202), 得到

$$\kappa - \bar{\kappa} = \vec{y} \cdot \vec{\nu} - \beta A(t) \quad \text{在 } \Gamma(t). \quad (218)$$

最后, 令变分 $\left[\frac{\delta}{\delta \Gamma} L_{\bar{\kappa}, \beta} \right](\vec{\chi}) = - \left\langle \vec{\nu} \cdot \vec{\nu}, \vec{\chi} \cdot \vec{\nu} \right\rangle_{\Gamma(t)}$, 利用 (185)、(186)、(188) 以及 $\kappa^* = \kappa$,

得到

$$\begin{aligned}
 \left\langle \vec{\nu} \cdot \vec{\nu}, \vec{\chi} \cdot \vec{\nu} \right\rangle_{\Gamma(t)} &= \left\langle \nabla_s \vec{y}, \nabla_s \vec{\chi} - 2 D_s(\vec{\chi}) \right\rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \nabla_s \cdot \vec{y}, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\
 &\quad - \left\langle \frac{1}{2} (\kappa - \bar{\kappa})^2 - \kappa (\vec{y} \cdot \vec{\nu} - \beta A(t)), \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\
 &\quad - \left\langle \kappa \vec{y}, (\nabla_s \vec{\chi})^\top \vec{\nu} \right\rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \vec{\chi} \in [H^1(\Gamma(t))]^d. \quad (219)
 \end{aligned}$$

因此, 得到如下弱形式。给定闭超曲面 $\Gamma(0)$, 求演化超曲面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ 及其整体参数化和诱导速度场 $\vec{\nu}$, 并求 $\kappa \in L^2(\mathcal{G}_T)$ 和 $\vec{y} \in [L^2(\mathcal{G}_T)]^d$, 使得对几乎处处的 $t \in (0, T)$, 所求的 $(\vec{\nu}(\cdot, t), \kappa(\cdot, t), \vec{y}(\cdot, t)) \in [L^2(\Gamma(t))]^d \times L^2(\Gamma(t)) \times [H^1(\Gamma(t))]^d$ 满足 (219)、(218) 和 (180)。

与注记 136 对应的结论对这一弱形式仍然成立。此外, 可推广半离散有限元逼近 (196)、(194) 和 (193), 以逼近弱形式 (219)、(218) 和 (180)。注记 137 与定理 138 也可推广至这一逼近。还可以施加体积与曲面面积约束, 且仍能证明逼近的稳定性。

在 Barrett et al. (2016b) 中, 我们考察了半离散逼近 (196)、(194) 和 (193) 的一种推广, 以及加入自发曲率和 ADE 效应后的相应推广; 这种推广可以减少切向运动。它以下述 Lagrange 泛函为基础:

$$\widehat{L}_{\vec{\kappa}, \beta, \theta}^h(\Gamma^h(t), \vec{\kappa}^h, \vec{Y}^h) = E_{\vec{\kappa}, \beta}^h(\Gamma^h(t)) - \left\langle Q_\theta^h \vec{\kappa}^h, \vec{Y}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h - \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{Y}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}, \quad (220)$$

其中 $\vec{Y}^h(\cdot, t) \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 是对应于约束 $\vec{\kappa}^h(\cdot, t) \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 的 Lagrange 乘子, 该约束满足

$$\left\langle Q_\theta^h \vec{\kappa}^h, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)). \quad (221)$$

这里, 对于给定的 $\theta \in [0, 1]$, Q_θ^h 是 (96) 的半离散形式, 其中 $\bar{\omega}^m$ 换为 $\bar{\omega}^h$, 并假定假设 64(ii) 成立。

对所有 $\vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 令 $\left[\frac{\delta}{\delta \vec{Y}^h} \widehat{L}_{\vec{\kappa}, \beta, \theta}^h \right](\vec{\eta}) = 0$, 得到 (221)。对所有 $\vec{\xi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 令 $\left[\frac{\delta}{\delta \vec{\kappa}^h} \widehat{L}_{\vec{\kappa}, \beta, \theta}^h \right](\vec{\xi}) = 0$, 得到 $\vec{\kappa}^h + (\beta A^h(t) - \bar{\kappa}) \bar{\omega}^h = \vec{\pi}_{\Gamma^h} \left[Q_\theta^h \vec{Y}^h \right]$, 其中 $A^h(t)$ 由 (212d) 给出。最后, 对所有 $\vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 令 $\left[\frac{\delta}{\delta \Gamma^h} \widehat{L}_{\vec{\kappa}, \beta, \theta}^h \right](\vec{\chi}) = -\langle Q_\theta^h \vec{\nu}^h, \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)}^h$ 。若 $\theta = 1$, 所得格式化为半离散 Dziuk 格式 (212)。若 $\theta = 0$, 该格式化为 (196)、(194) 和 (193) 的一个变体, 它考虑自发曲率和 ADE 效应, 且仍满足定理 88(iii)。对于任意 $\theta \in (0, 1)$, 该格式介于这两个极端情形之间。此外, 对于任意给定的 $\theta \in [0, 1]$, 这一格式满足稳定性估计, 它是定理 143 的推广, 细节见 Barrett et al. (2016b, 定理 3.3)。上述稳定性估计对加入体积与曲面面积约束的变体也成立。

注记 146 (带边界的曲面) 对于带边界的演化曲面, 引理 142 可推广如下; 这里仍用

$\mathcal{V} = f$ 简记 (204)。由定理 32、引理 39(ii) 和定理 21, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\bar{\kappa}, \beta}(\Gamma(t)) &= -\langle f, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} + \int_{\partial\Gamma(t)} \left(\frac{1}{2} (\kappa - \bar{\kappa})^2 + \beta A(t) \kappa \right) \vec{\nu} \cdot \vec{\mu} \, d\mathcal{H}^{d-2} \\ &\quad - \int_{\partial\Gamma(t)} \mathcal{V} \vec{\mu} \cdot \nabla_s \kappa \, d\mathcal{H}^{d-2} + \int_{\partial\Gamma(t)} (\kappa - \bar{\kappa} + \beta A(t)) \vec{\mu} \cdot \nabla_s \mathcal{V} \, d\mathcal{H}^{d-2}, \end{aligned} \quad (222)$$

其中 $\vec{\nu}$ 是演化超曲面的整体参数化所诱导的速度场, $\vec{\mu}(t)$ 表示 $\partial\Gamma(t)$ 上的单位外余法向量。因此, 为使 (204) 仍为 $E_{\bar{\kappa}, \beta}(\Gamma(t))$ 的 L^2 梯度流, 需要给定边界条件, 使 (222) 中的边界项消失。具体可考虑如下几类边界条件。最简单的情形是保持边界固定, 即对所有 $t \in (0, T]$ 均有 $\partial\Gamma(t) = \partial\Gamma(0)$; 这与 (43) 相同。由此, (222) 中的前两个边界项消失。若在 $\partial\Gamma(t)$ 上有 $\kappa - \bar{\kappa} + \beta A(t) = 0$ 或 $\vec{\mu} \cdot \nabla_s \mathcal{V} = 0$, 则第三个边界项也消失。对所有 $t \in (0, T]$, 令 $\partial\Gamma(t) = \partial\Gamma(0)$, 并在 $\partial\Gamma(t)$ 上令 $\kappa - \bar{\kappa} + \beta A(t) = 0$, 称为 Navier 边界条件。对于给定的 $\vec{\zeta} \in C(\partial\Gamma(0), \mathbb{S}^{d-1})$, 对所有 $t \in (0, T]$, 令 $\partial\Gamma(t) = \partial\Gamma(0)$, 并在 $\partial\Gamma(t)$ 上令 $\vec{\mu}(t) = \vec{\zeta}$, 则称为夹持边界条件。容易证明, 夹持边界条件蕴含在 $\partial\Gamma(t)$ 上有 $\vec{\mu} \cdot \nabla_s \mathcal{V} = 0$, 从而 (222) 中的三个边界项全部消失。

第三类可用的边界条件称为自由边界条件。此时边界可以自由移动, 施加

$$\frac{1}{2} (\kappa - \bar{\kappa})^2 + \beta A(t) \kappa = 0, \quad \vec{\mu} \cdot \nabla_s \kappa = 0, \quad \kappa - \bar{\kappa} + \beta A(t) = 0 \quad \text{在 } \partial\Gamma(t).$$

后, (222) 中的三个边界项均消失。对于 $d = 2$ 的情形, 细节见 Barrett et al. (2012b); 对于 $d = 3$ 的情形, 细节见 Barrett et al. (2017d)。后一篇论文的讨论容易推广至 $d > 3$ 。此外, 在 Barrett et al. (2017d) 中, 作者还加入了边界能量 $\varsigma \mathcal{H}^{d-2}(\partial\Gamma(t))$, 其中 $\varsigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$; 当 $d = 3$ 时, 该能量称为线能量。该文也考虑了 Gauss 曲率效应, 它通过 Gauss–Bonnet 定理引入, 参看定理 40。

对于 Navier 边界条件, 容易修改有限元逼近 (208)、(167b): 将 (167b) 中的 $V(\Gamma^m)$ 换为 $\underline{V}_D(\Gamma^m)$, 参看 (44); 将 (208) 中的 $V(\Gamma^m)$ 换为 $V_D(\Gamma^m)$, 其中 $\underline{V}_D(\Gamma^m) = [V_D(\Gamma^m)]^d$; 并求 $(\vec{X}^{m+1}, \kappa^{m+1}) \in \underline{V}(\Gamma^m) \times V(\Gamma^m)$, 使得 $\vec{X}^{m+1} - \text{id}_{|\Gamma^m} \in \underline{V}_D(\Gamma^m)$ 且 $\kappa^{m+1} - (\bar{\kappa} - \beta A^m) \in V_D(\Gamma^m)$ 。对于夹持和自由边界条件, 无法这样修改这一有限元逼近。不过, 基于 (217) 和 (220) 的方法均可适用于上述三类边界条件。关于后一种方法的进一步细节, 包括半离散格式的稳定性结论, 仍参看 Barrett et al. (2012b, 2017d)。此外, 我们在 Barrett et al. (2018) 中将这一方法推广至两相生物膜梯度流的逼近。在这种情形下, 需要在超曲面上不同相之间的界面处满足特定的衔接条件, 以取代边界条件。最后, 一个相关问题是曲线网络在弹性流下的演化, 其中两条或多条曲线在连接点相接。作者在 Barrett et al. (2012c) 中考察了这一问题。

9.5 其他数值方法

Rusu (2005) 首次引入了基于位置向量与平均曲率向量的 Willmore 流混合变分形式, 由此可以采用连续分片线性有限元逼近。Clarenz et al. (2004) 将这一方法推广至带边界的曲面, 并应用于曲面修复问题。亦参看 Deckelnick and Dziuk (2006); Deckelnick and Schieweck (2010); Deckelnick et al. (2015), 这些文献在假定解充分光滑的条件下, 对以函数图形表示的 Willmore 流的半离散有限元逼近作了误差分析。

其他参数数值方法见 Dziuk et al. (2002); Mayer and Simonett (2002); Bobenko and Schröder (2005); Bonito et al. (2010); Elliott and Stinner (2010, 2013); Bartels et al. (2012); Bartezzaghi et al. (2019)。此外, Droske and Rumpf (2004) 研究了基于水平集的数值方法, 相场型方法则见 Du et al. (2005); Esedoglu et al. (2014); Bretin et al. (2015)。

第十章

生物膜

本章讨论第 9 章中的曲率能量第一变分如何进入还涉及体区域中各量的演化律。这与囊泡和生物膜的演化有关：膜的曲率能量会与膜周围的流体相互作用。生物膜是脂质双分子层，它们形成内含流体的囊状结构，外部则被另一种可能不同的流体包围。膜存在于多种生物系统中，因此，正确理解生物膜的形状及其演化是生命科学中十分重要的问题。例如，红细胞的双凹形状就可作为第 9 章中曲率能量的稳态出现。

10.1 流体生物膜的动力学模型

下面引入 Arroyo and DeSimone (2009) 所提出模型的一种变体，它将曲率能量的第一变分与体区域和表面上的 (Navier-)Stokes 方程耦合。更准确地说，体区域中的 (Navier-)Stokes 系统与膜上的切向 (Navier-)Stokes 系统耦合。切向系统还包含曲面不可压缩条件；即使流体速度使曲面发生较大形变，这一条件仍能使离散问题具有良好的网格性质。

对于无边界的紧超曲面 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ ，其中 $d \geq 2$ ，生物膜的一般化弹性能量为

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{2} \alpha (\kappa - \bar{\kappa})^2 + \alpha^G \mathcal{K} \, d\mathcal{H}^{d-1} + \frac{1}{2} \alpha \beta (\langle \kappa, 1 \rangle_{\Gamma} - M_0)^2 \quad (223)$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ 和 $\alpha^G \in \mathbb{R}$ 分别为弯曲刚度与 Gauss 弯曲刚度。同前， $\bar{\kappa}$ 为自发曲率，它例如可由膜内的局部非均匀性产生；参数 $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 、 $M_0 \in \mathbb{R}$ 则与面积差弹性 (ADE) 模型有关，参看 §9.4。此外， $\mathcal{K}$ 为 Gauss 曲率。Nitsche (1993) 指出，对于形式为 $\int_{\Gamma} q(\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}) \, d\mathcal{H}^{d-1}$ 的曲率能量，若 q 关于各主曲率至多为二次，且在其自变量

的任意置换下不变, 则最一般的形式为 $q(\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}) = \frac{1}{2} \alpha \kappa^2 + \alpha^G \mathcal{K} + \alpha_1 \kappa + \alpha_2$ 。取 $\alpha_1 = -\alpha \bar{\kappa}$ 和 $\alpha_2 = \frac{1}{2} \alpha \bar{\kappa}^2$, 便得到 (223) 的第一项。若 α^G 为常数, 由 Gauss-Bonnet 定理, 即定理 40, 由于曲面没有边界, $\int_{\Gamma} \alpha^G \mathcal{K} d\mathcal{H}^{d-1}$ 在固定的拓扑类中为常数, 因此其第一变分总是为零。暂时置 $\alpha^G = 0$; 只有在考虑非均匀膜或带边界的开膜时, 才须保留这一项, 参看 Elliott and Stinner (2010); Barrett et al. (2017d,b, 2018)。因此, 以下取 $\alpha E_{\bar{\kappa}, \beta}(\Gamma(t))$ 为演化生物膜的弹性能量, 其中 $E_{\bar{\kappa}, \beta}(\Gamma(t))$ 按 (201) 定义。

沿用 §2.4 的记号, 假定两种流体分别占据区域 $\Omega_-(t)$ 和 $\Omega_+(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_-(t)}$, 且 $\Gamma(t) = \partial\Omega_-(t)$ 。以 $\vec{\nu}$ 表示 $\Omega_-(t)$ 在 $\Gamma(t)$ 上的单位外法向量, 参看 §2.4 的图 1。这里 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为固定区域, 且 $d \geq 2$ 。与第 8 章一样, 在这两个流体区域中要求不可压缩 Stokes 方程成立, 并在 $\partial\Omega$ 上施加无滑移边界条件, 即

$$-\nabla \cdot \sigma = \vec{0}, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{于 } \Omega_{\pm}(t), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad \text{在 } \partial\Omega \quad (224)$$

其中应力张量 σ 按 (135) 定义。关于更一般的边界条件, 仍参看注记 127(iv)。

生物膜的典型尺度使得以 Stokes 方程逼近 Navier-Stokes 方程十分准确, 参看 Barrett et al. (2015c)。因此, 下文仅考虑体区域中的 Stokes 系统; 如何将以下讨论推广至 Navier-Stokes 流, 可参看 Barrett et al. (2016a, 2017c) 和第 8 章。

下面沿用并推广 Arroyo and DeSimone (2009) 的方法。该文利用源自 Scriven (1960) 的界面流体动力学理论, 建立了考虑囊泡和生物膜流体行为的演化律。事实上, 这种脂质双分子层膜可描述为二维曲面, 脂质分子沿切向具有类似流体的行为, 而由弹性弯曲能量产生的弹性力则沿法向作用。关于流体界面的建模与分析, 进一步细节见 Slattery et al. (2007); Bothe and Prüss (2010)。本文只需指出: 若界面与体区域之间没有质量传递, 并假定界面处内外流体满足无滑移条件, 则自然应要求体区域速度跨界面连续, 并使界面随体区域速度移动。更多细节见 Barrett et al. (2015a, p. 1830)。

总之, 自由曲面 $\Gamma(t)$ 上应满足下列条件:

$$[\vec{u}]_{-}^{+} = \vec{0} \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (225a)$$

$$\rho_{\Gamma} \partial_t^{\bullet} \vec{u} - \nabla_s \cdot \sigma_{\Gamma} = [\sigma \vec{\nu}]_{-}^{+} + \alpha \vec{f}_{\Gamma} \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (225b)$$

$$\nabla_s \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (225c)$$

$$\mathcal{V} = \vec{u} \cdot \vec{\nu} \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (225d)$$

其中 $\rho_{\Gamma} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 表示曲面物质的面密度, $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ 是弯曲刚度, 且 $\vec{f}_{\Gamma} = f_{\Gamma} \vec{\nu}$ 。这里 f_{Γ} 表示弯曲能量 $E_{\bar{\kappa}, \beta}$ 的负第一变分, 参看 (201), 即

$$f_{\Gamma} = -\Delta_s \kappa - (\kappa - \bar{\kappa}) |\nabla_s \vec{\nu}|^2 + \frac{1}{2} (\kappa - \bar{\kappa})^2 \kappa - \beta A(t) (|\nabla_s \vec{\nu}|^2 - \kappa^2), \quad (226)$$

其中 $\varkappa$ 满足引理 13(ii), 而 $A(t) = \langle \varkappa, 1 \rangle_{\Gamma(t)} - M_0$, 参看引理 142。此外,

$$\partial_t^\bullet f = \partial_t f + \vec{u} \cdot \nabla f \quad (227)$$

是关于流体速度 $\vec{u}$ 的物质时间导数。这一定义与注记 29(ii) 有关; 这里的参数化 $\vec{x}(\cdot, t)$ 定义为满足

$$\vec{u}(\vec{x}(\vec{q}, t), t) = (\partial_t \vec{x})(\vec{q}, t) \quad \forall (\vec{q}, t) \in \Upsilon \times [0, T], \quad (228)$$

而不是按定义 25(ii) 给出, 因而 $\vec{x}(\vec{q}, t)$ 确实是物质点的轨迹。方程 (225c) 表示界面的质量守恒, 它对应于体区域中的标准不可压缩 (Navier-)Stokes 方程, 参看 (224)。特别地, 它意味着膜是局部不可压缩的。为说明这一点, 考察随流体速度 $\vec{u}$ 输运的曲面片 $\sigma(t) \subset \Gamma(t)$, 即 $\sigma(t) = \vec{x}(\sigma_\Upsilon, t)$, 其中 $\sigma_\Upsilon \subset \Upsilon$, 且 $\vec{x}$ 满足 (228)。由输运定理, 即定理 32, 可知

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}^{d-1}(\sigma(t)) = \int_{\sigma(t)} \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}} d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\sigma(t)} \nabla_s \cdot \vec{u} d\mathcal{H}^{d-1} = 0,$$

亦参看 Arroyo and DeSimone (2009)。曲面上的动量平衡给出 (225b), 参看 Arroyo and DeSimone (2009); Köhne and Lengeler (2018); Lengeler (2018)。这里曲面应力张量定义为

$$\sigma_\Gamma = 2\mu_\Gamma D_s(\vec{u}) - p_\Gamma P_\Gamma \quad \text{在 } \Gamma(t), \quad (229)$$

其中 p_Γ 为曲面压力, $\mu_\Gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ 为曲面剪切黏度, P_Γ 为到切空间的投影, $D_s(\vec{u})$ 为曲面形变率张量, 参看定义 5(vii)。张量 $D_s(\vec{u})$ 通过度量张量衡量长度和角度的变化率, 可与引理 30 比较。

最后, 项 $[\sigma \vec{\nu}]_-^+$ 是体区域流体施加于曲面的力, 参看 (12) 及其在注记 36 中向量值量的推广。当前考虑的总弯曲能量为 $\alpha E_{\vec{\kappa}, \beta}(\Gamma)$, 其中 $E_{\vec{\kappa}, \beta}$ 是 (201) 定义的无量纲能量, α 是具有能量量纲的弯曲刚度。与 §8.1 一样, (225d) 表示界面随流体速度的法向分量演化。

再给定 $\Gamma(0)$ 的初始条件以及

$$\rho_\Gamma \vec{u}(\cdot, 0) = \rho_\Gamma \vec{u}_0 \quad \text{在 } \Gamma(0),$$

便得到封闭的系统 (224)、(225)。这里为简便起见, 假定初始速度 $\vec{u}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 已给定。

引理 147 设 $(\mathcal{G}_T, \vec{u}, p)$ 是 (224)、(225) 和 (226) 的充分光滑解。

(i) 有

$$\frac{d}{dt} |\Gamma(t)| = 0.$$

(ii) 有

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^d(\Omega_-(t)) = 0.$$

(iii) 有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\alpha E_{\vec{\kappa}, \beta}(\Gamma(t)) + \frac{1}{2} \rho_\Gamma |\vec{u}|_{\Gamma(t)}^2 \right] \\ &= -2 \mu_\Gamma \langle D_s(\vec{u}), D_s(\vec{u}) \rangle_{\Gamma(t)} - 2 \langle \mu D(\vec{u}), D(\vec{u}) \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

证明 设 $\vec{x}$ 是 $\mathcal{G}_T$ 的任意整体参数化, 其诱导速度场为 $\vec{\mathcal{V}}$.

(i) 将输运定理, 即定理 32, 与散度定理, 即定理 21, 应用于切向场 $\vec{f} = \vec{\mathcal{V}}_\Gamma$ 和 $\vec{f} = P_\Gamma \vec{u}$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle 1, 1 \rangle_{\Gamma(t)} &= \left\langle 1, \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}} \right\rangle_{\Gamma(t)} = \left\langle 1, \nabla_s \cdot (\vec{\mathcal{V}} - \vec{\mathcal{V}}_\Gamma) \right\rangle_{\Gamma(t)} = \langle 1, \nabla_s \cdot (\mathcal{V} \vec{\nu}) \rangle_{\Gamma(t)} \\ &= \langle 1, \nabla_s \cdot ((\vec{u} \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu}) \rangle_{\Gamma(t)} = \langle 1, \nabla_s \cdot (\vec{u} - P_\Gamma \vec{u}) \rangle_{\Gamma(t)} \\ &= \langle 1, \nabla_s \cdot \vec{u} \rangle_{\Gamma(t)} = 0, \end{aligned} \quad (230)$$

这正是所需结论。

(ii) 仿照注记 117(ii), 由输运定理, 即定理 33, 以及 $\Gamma(t)$ 上的 $\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\nu} = \vec{u} \cdot \vec{\nu}$ 和 $\Omega_-(t)$ 中的 $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, 便得到结论。

(iii) 由引理 142、(226) 和 (225d) 得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E_{\vec{\kappa}, \beta}(\Gamma(t)) \\ &= \left\langle \Delta_s \kappa + (\kappa - \bar{\kappa}) |\nabla_s \vec{\nu}|^2 - \frac{1}{2} (\kappa - \bar{\kappa})^2 \kappa + \beta A(t) (|\nabla_s \vec{\nu}|^2 - \kappa^2), \mathcal{V} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\ &= -\langle f_\Gamma, \mathcal{V} \rangle_{\Gamma(t)} = -\langle f_\Gamma \vec{\nu}, \vec{u} \rangle_{\Gamma(t)} = -\left\langle \vec{f}_\Gamma, \vec{u} \right\rangle_{\Gamma(t)}. \end{aligned} \quad (231)$$

只须分析 (231) 的右端。为此, 首先由引理 9(i)、(ii), 定义 5(viii), 引理 7(iii), 超曲面上的散度定理 (即定理 21) 连同稠密性论证, 以及注记 6(vi), 得到

$$\begin{aligned} \left\langle p_\Gamma, \nabla_s \cdot \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} &= \left\langle p_\Gamma P_\Gamma, \nabla_s \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\ &= \left\langle \nabla_s \cdot (p_\Gamma P_\Gamma \vec{\xi}), 1 \right\rangle_{\Gamma(t)} - \left\langle \nabla_s \cdot (p_\Gamma P_\Gamma), \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\ &= -\left\langle \nabla_s \cdot (p_\Gamma P_\Gamma), \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \vec{\xi} \in [H^1(\Gamma(t))]^d. \end{aligned} \quad (232)$$

于是, 由 (232)、注记 22(iii) 连同稠密性论证, 以及 (229)、(225b)、(138) 和 (224), 得

到

$$\begin{aligned}
& \rho_\Gamma \left\langle \partial_t^\bullet \vec{u}, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} + 2\mu_\Gamma \left\langle D_s(\vec{u}), D_s(\vec{\xi}) \right\rangle_{\Gamma(t)} - \left\langle p_\Gamma, \nabla_s \cdot \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\
&= \left\langle \rho_\Gamma \partial_t^\bullet \vec{u} - \nabla_s \cdot \sigma_\Gamma, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} = \left\langle [\sigma \vec{v}]_-^+, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} + \alpha \left\langle \vec{f}_\Gamma, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\
&= -2 \left(\mu D(\vec{u}), D(\vec{\xi}) \right) + \left(p, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) + \alpha \left\langle \vec{f}_\Gamma, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{V}_{\Gamma(t)}, \quad (233)
\end{aligned}$$

其中

$$\mathbb{V}_{\Gamma(t)} = \left\{ \vec{\xi} \in [H_0^1(\Omega)]^d : P_\Gamma \vec{\xi}|_{\Gamma(t)} \in [H^1(\Gamma(t))]^d \right\}. \quad (234)$$

由引理 14(i)、(iii) 连同稠密性论证, 以及关于 $\Omega_-(t)$ 的迹定理可知, 对于 $\vec{\xi} \in \mathbb{V}_{\Gamma(t)}$, (233) 中的所有项均有定义。将 (231) 与取 $\vec{\xi} = \vec{u}$ 时的 (233) 合并, 利用 (224) 和 (225c), 得到

$$\begin{aligned}
& \alpha \frac{d}{dt} E_{\vec{\mathcal{A}}, \beta}(\Gamma(t)) + \rho_\Gamma \left\langle \partial_t^\bullet \vec{u}, \vec{u} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\
&= -2\mu_\Gamma \left\langle D_s(\vec{u}), D_s(\vec{u}) \right\rangle_{\Gamma(t)} - 2(\mu D(\vec{u}), D(\vec{u})). \quad (235)
\end{aligned}$$

其次, 仿照 (230), 由 (227)、注记 29(ii)、(225d)、注记 8(iii)、定理 21、引理 7(i)、(225c) 和定理 32, 得到

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial_t^\bullet \vec{u}, \vec{u} \right\rangle_{\Gamma(t)} &= \left\langle \partial_t^\circ \vec{u}, \vec{u} \right\rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \left[(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \nabla \right] \vec{u}, \vec{u} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\
&= \frac{1}{2} \left\langle \partial_t^\circ |\vec{u}|^2, 1 \right\rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \left[P_\Gamma (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \nabla_s \right] \vec{u}, \vec{u} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\
&= \frac{1}{2} \left\langle \partial_t^\circ |\vec{u}|^2, 1 \right\rangle_{\Gamma(t)} - \frac{1}{2} \left\langle \nabla_s \cdot \left[P_\Gamma (\vec{u} - \vec{v}) \right], |\vec{u}|^2 \right\rangle_{\Gamma(t)} \\
&= \frac{1}{2} \left\langle \partial_t^\circ |\vec{u}|^2, 1 \right\rangle_{\Gamma(t)} - \frac{1}{2} \left\langle \nabla_s \cdot (\vec{u} - \vec{v}), |\vec{u}|^2 \right\rangle_{\Gamma(t)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle |\vec{u}|^2, 1 \right\rangle_{\Gamma(t)}.
\end{aligned}$$

再与 (235) 合并, 即得所需结论。□

特别地, 引理 147(i)、(ii) 的守恒性质, 分别由 $\Gamma(t)$ 上的连续性方程 $\nabla_s \cdot \vec{u} = 0$ 以及 $\Omega_\pm(t)$ 中的连续性方程 $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ 得到。因此, 与例如 §9.4 的情形不同, 这里不需要为曲面积和所围体积施加额外的附加约束。

10.2 生物膜动力学的弱形式

对于 §10.1 中的模型, 最自然的弱形式采用流体的切向速度来推进 $\Gamma(t)$, 从而将 (225d) 换为 $\Gamma(t)$ 上的 $\vec{\mathcal{V}} = \vec{u}$. 这与 §8.1.4 中处理两相 Stokes 流的做法相同. 然而, 与该节的情形不同, $\Gamma(t)$ 上的连续性方程 $\nabla_s \cdot \vec{u} = 0$ 会使基于这一自然弱形式的离散具有良好的网格性质.

由 (233), 得到系统 (224)、(225) 和 (226) 的如下弱形式. 给定闭超曲面 $\Gamma(0)$, 并在 $\rho_\Gamma > 0$ 时给定 $\vec{u}_0 \in [H_0^1(\Omega)]^d$, 求演化超曲面 $(\Gamma(t))_{t \in [0, T]}$ 及其整体参数化和诱导速度场 $\vec{\mathcal{V}}$, 并求 $\vec{\mathcal{Z}} \in [L^2(\mathcal{G}_T)]^d$, $p_\Gamma \in L^2(\mathcal{G}_T)$, $\vec{f}_\Gamma \in [L^2(\mathcal{G}_T)]^d$, 以及满足 $\vec{u}|_{\mathcal{G}_T} \in [H^1(\mathcal{G}_T)]^d$ 和 $\rho_\Gamma \vec{u}(\cdot, 0)|_{\Gamma(0)} = \rho_\Gamma (\vec{u}_0)|_{\Gamma(0)}$ 的 $\vec{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, 再求 $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对几乎处处的 $t \in (0, T)$, 所求的 $(\vec{\mathcal{V}}(\cdot, t), \vec{\mathcal{Z}}(\cdot, t), p_\Gamma(\cdot, t), \vec{f}_\Gamma(\cdot, t), \vec{u}(\cdot, t), p(\cdot, t)) \in [L^2(\Gamma(t))]^d \times [H^1(\Gamma(t))]^d \times L^2(\Gamma(t)) \times [L^2(\Gamma(t))]^d \times \mathbb{V}_{\Gamma(t)} \times L^2(\Omega)$ 满足

$$2 \left(\mu D(\vec{u}), D(\vec{\xi}) \right) - \left(p, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) + \rho_\Gamma \left\langle \partial_t^\bullet \vec{u}, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} + 2 \mu_\Gamma \left\langle D_s(\vec{u}), D_s(\vec{\xi}) \right\rangle_{\Gamma(t)} - \left\langle p_\Gamma, \nabla_s \cdot \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} = \alpha \left\langle \vec{f}_\Gamma, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{V}_{\Gamma(t)}, \quad (236a)$$

$$(\nabla \cdot \vec{u}, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega), \quad (236b)$$

$$(\nabla_s \cdot \vec{u}, \eta)_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \eta \in L^2(\Gamma(t)), \quad (236c)$$

$$\left\langle \vec{\mathcal{V}}, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma(t)} = \langle \vec{u}, \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \vec{\chi} \in [L^2(\Gamma(t))]^d, \quad (236d)$$

$$\langle \vec{\mathcal{Z}}, \vec{\eta} \rangle_{\Gamma(t)} + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in [H^1(\Gamma(t))]^d, \quad (236e)$$

同时还须满足确定 $\vec{f}_\Gamma$ 的方程. 在最简单的 $\varpi = \beta = 0$ 情形下, 由引理 131 和 (174a), 置

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{f}_\Gamma, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma(t)} &= \langle \nabla_s \vec{\mathcal{Z}}, \nabla_s \vec{\chi} - 2 D_s(\vec{\chi}) \rangle_{\Gamma(t)} + \langle \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{Z}}, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle |\vec{\mathcal{Z}}|^2, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \vec{\chi} \in [H^1(\Gamma(t))]^d. \end{aligned} \quad (236f)$$

在 ϖ 或 β 非零的一般情形下, 采用 (210). 此时以如下条件代替 (236f): 还须存在 $\vec{y} \in [L^2(\mathcal{G}_T)]^d$, 使得对几乎处处的 $t \in (0, T)$, 有 $\vec{y}(\cdot, t) \in [H^1(\Gamma(t))]^d$, 且

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{f}_\Gamma, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma(t)} &= \langle \nabla_s \vec{y}, \nabla_s \vec{\chi} - 2 D_s(\vec{\chi}) \rangle_{\Gamma(t)} + \langle \nabla_s \cdot \vec{y}, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \rangle_{\Gamma(t)} \\ &\quad - \left\langle \frac{1}{2} |\vec{\mathcal{Z}} - \varpi \vec{v}|^2 - \vec{\mathcal{Z}} \cdot (\vec{y} - \beta A(t) \vec{v}), \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma(t)} \\ &\quad + (\beta A(t) - \varpi) \left\langle \vec{\mathcal{Z}}, (\nabla_s \vec{\chi})^\top \vec{v} \right\rangle_{\Gamma(t)} \quad \forall \vec{\chi} \in [H^1(\Gamma(t))]^d, \end{aligned} \quad (237a)$$

$$\left\langle \vec{\kappa} + (\beta A(t) - \vec{\kappa}) \vec{\nu} - \vec{y}, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \vec{\xi} \in [H^1(\Gamma(t))]^d, \quad (237b)$$

其中 $A(t)$ 由 (210d) 定义。

下面说明：若 $\Gamma(t)$ 的连通分支均不是球面，则曲面压力唯一，而体区域压力在相差一个加法常数的意义下唯一。图 1 给出了 $\Gamma(t)$ 只有一个连通分支的特殊情形。假设 (236) 有两个只在压力上不同的解，其中一个解的压力对为 $(p_1, p_{\Gamma,1})$ ，另一个为 $(p_2, p_{\Gamma,2})$ 。置 $\bar{p} = p_1 - p_2$ 和 $\bar{p}_\Gamma = p_{\Gamma,1} - p_{\Gamma,2}$ ，则

$$\left(\bar{p}, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) + \left\langle \bar{p}_\Gamma, \nabla_s \cdot \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)} = 0 \quad \forall \vec{\xi} \in [H_0^1(\Omega)]^d,$$

首先可知， $\bar{p}$ 在 $\Omega_\pm(t)$ 的各连通分支上分别等于某个常数 $\bar{p}_\pm$ 。应用体区域 $\Omega_\pm(t)$ 中的散度定理、引理 7(i)，以及 $\Gamma(t)$ 上的散度定理（即定理 21），得到

$$\nabla_s \bar{p}_\Gamma + \kappa \bar{p}_\Gamma \vec{\nu} = -[\bar{p} \vec{\nu}]_-^+ \quad \text{在 } \Gamma(t).$$

由于 $\nabla_s \bar{p}_\Gamma$ 是切向的，便有 $\nabla_s \bar{p}_\Gamma = \vec{0}$ ，从而 $\bar{p}_\Gamma$ 在 $\Gamma(t)$ 的每个连通分支上为常数。此外，在 $\Gamma(t)$ 上有 $\kappa \bar{p}_\Gamma = -[\bar{p}]_-^+$ 。若 κ 在 $\Gamma(t)$ 的某个连通分支上不是常数，而该分支不是球面时正是如此，则在此分支上有 $\bar{p}_\Gamma = [\bar{p}]_-^+ = 0$ ，因而对于 $\Omega_\pm(t)$ 的相应连通分支，有 $\bar{p}_+ = \bar{p}_-$ 。对 $\Gamma(t)$ 的所有连通分支重复这一论证可知：若 $\Gamma(t)$ 的连通分支均不是球面，则 p_Γ 在 $\Gamma(t)$ 上唯一， p 在 Ω 中则在相差一个加法常数的意义下唯一。但是，若 κ 在 $\Gamma(t)$ 的某个连通分支上为常数，即 $\Gamma(t)$ 的该分支是球面，则该分支上的 p_Γ 仅在相差一个加法常数的意义下唯一。

根据上述讨论，提出如下 LBB 型条件。若 $\Gamma(t)$ 和 $\partial\Omega$ 充分光滑，并且 $\Gamma(t)$ 没有球面连通分支，则存在常数 $C \in \mathbb{R}_{>0}$ ，使得

$$\inf_{(\varphi, \eta) \in \widehat{\mathbb{P}} \times L^2(\Gamma(t))} \sup_{\vec{\xi} \in \mathbb{V}_{\Gamma(t)}} \frac{\left(\varphi, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) + \left\langle \eta, \nabla_s \cdot \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma(t)}}{\left(|\varphi|_\Omega + |\eta|_{\Gamma(t)} \right) \left(\left\| \vec{\xi} \right\|_{1, \Omega} + \left\| P_\Gamma \vec{\xi}|_{\Gamma(t)} \right\|_{1, \Gamma(t)} \right)} \geq C > 0. \quad (238)$$

这里沿用 (234)，以及 (143) 中空间 $\widehat{\mathbb{P}}$ 和 H^1 范数 $\|\cdot\|_{1, \Omega}$ 的定义。此外，以 $\|\cdot\|_{1, \Gamma(t)}^2 = |\cdot|_{\Gamma(t)}^2 + |\nabla_s \cdot \cdot|_{\Gamma(t)}^2$ 定义 $\Gamma(t)$ 上的 H^1 范数。LBB 型条件 (238) 可由 Lengeler (2015) 中的压力重构结论推出。

10.3 半离散有限元逼近

下面引入弱形式 (236) 的有限元版本。前文已讨论过, $\Gamma^h(t)$ 的离散切向速度的选择十分重要。一般而言, 若采用沿离散法向的速度, 网格质量会恶化。对于许多两相流问题, 采用周围流体运动所诱导的切向速度, 同样会使网格质量变差。不过, 在当前问题中, 由于逼近了局部面积守恒性质, 即 $\Gamma(t)$ 上的 $\nabla_s \cdot \vec{u} = 0$, 即使取 $\vec{\mathcal{V}} = \vec{u}$, 网格质量在整个演化过程中通常仍会保持良好。

沿用 §8.1.2 中半离散有限元空间的定义, 特别是空间 (155)。此外, 定义空间

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\Gamma^h}^h &= \left\{ \vec{\phi} \in H^1(0, T; \mathbb{U}^h) : \right. \\ &\quad \left. \exists \vec{\chi} \in \underline{V}_T(\mathcal{G}_T^h) \text{ 其中 } \vec{\chi}(\cdot, t) = \vec{\pi}_{\Gamma^h} \left[\vec{\phi}|_{\Gamma^h(t)} \right] \quad \forall t \in [0, T] \right\}. \end{aligned}$$

由此得到 (236) 的如下时间连续半离散有限元逼近。先给出 $\varkappa = \beta = 0$ 时较简单的情形, 为此沿用格式 (178)。

给定闭多面体超曲面 $\Gamma^h(0)$, 求演化多面体超曲面 $\mathcal{G}_T^h$ 及其诱导速度 $\vec{\mathcal{V}}^h \in V(\mathcal{G}_T^h)$, 并求 $\vec{\kappa}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$ 、 $\vec{U}^h \in \mathbb{U}_{\Gamma^h}^h$ 、 $P^h \in \widehat{\mathbb{P}}_T^h$ 、 $P_\Gamma^h \in V(\mathcal{G}_T^h)$ 和 $\vec{F}_\Gamma^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$, 使得对所有 $t \in (0, T]$, 所求的 $(\vec{U}^h(\cdot, t), P^h(\cdot, t), P_\Gamma^h(\cdot, t), \vec{\mathcal{V}}^h(\cdot, t), \vec{\kappa}^h(\cdot, t), \vec{F}_\Gamma^h(\cdot, t)) \in \mathbb{U}^h \times \widehat{\mathbb{P}}^h(t) \times V(\Gamma^h(t)) \times \underline{V}(\Gamma^h(t)) \times \underline{V}(\Gamma^h(t)) \times \underline{V}(\Gamma^h(t))$ 满足

$$\begin{aligned} &2 \left(\mu^h D(\vec{U}^h), D(\vec{\xi}) \right) - \left(P^h, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) + \rho_\Gamma \left\langle \partial_t^{\circ, h} \vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{U}^h, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\ &\quad + 2 \mu_\Gamma \left\langle D_s(\vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{U}^h), D_s(\vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{\xi}) \right\rangle_{\Gamma^h(t)} - \left\langle P_\Gamma^h, \nabla_s \cdot (\vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{\xi}) \right\rangle_{\Gamma^h(t)} \\ &= \alpha \left\langle \vec{F}_\Gamma^h, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}^h, \end{aligned} \quad (239a)$$

$$\left(\nabla \cdot \vec{U}^h, \varphi \right) = 0 \quad \forall \varphi \in \widehat{\mathbb{P}}^h(t), \quad (239b)$$

$$\left\langle \nabla_s \cdot (\vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{U}^h), \eta \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \eta \in V(\Gamma^h(t)), \quad (239c)$$

$$\left\langle \vec{\mathcal{V}}^h, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = \left\langle \vec{U}^h, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \quad \forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \quad (239d)$$

$$\left\langle \vec{\kappa}^h, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \left\langle \nabla_s \text{id}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \quad (239e)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{F}_\Gamma^h, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h &= \left\langle \nabla_s \vec{\kappa}^h, \nabla_s \vec{\chi} - 2 D_s(\vec{\chi}) \right\rangle_{\Gamma^h(t)} + \left\langle \nabla_s \cdot \vec{\kappa}^h, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\langle |\vec{\kappa}^h|^2, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \quad \forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)). \end{aligned} \quad (239f)$$

这一半离散逼近具有下述稳定性与守恒性质。

定理 148 设 $(\mathcal{G}_T^h, \vec{U}^h, P^h, P_\Gamma^h, \vec{\kappa}^h, \vec{F}_\Gamma^h)$ 是 (239) 的解, 并设 $\vec{\kappa}^h \in \underline{V}_T(\mathcal{G}_T^h)$ 。则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\rho_\Gamma \left(\left| \vec{U}^h \right|_{\Gamma^h(t)}^h \right)^2 + \alpha \left(\left| \vec{\kappa}^h \right|_{\Gamma^h(t)}^h \right)^2 \right) + 2 \left(\mu^h D(\vec{U}^h), D(\vec{U}^h) \right) \\ + 2 \mu_\Gamma \left\langle D_s(\vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{U}^h), D_s(\vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{U}^h) \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0. \end{aligned} \quad (240)$$

此外,

$$\frac{d}{dt} \left\langle \phi_k^{\Gamma^h(t)}, 1 \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad (241)$$

从而

$$\frac{d}{dt} |\Gamma^h(t)| = 0. \quad (242)$$

证明 在 (239a) 中取 $\vec{\xi} = \vec{U}^h(\cdot, t)$, 在 (239b) 中取 $\varphi = P^h(\cdot, t)$, 并在 (239c) 中取 $\eta = P_\Gamma^h(\cdot, t)$, 得到

$$\begin{aligned} 2 \left(\mu^h D(\vec{U}^h), D(\vec{U}^h) \right) + \rho_\Gamma \left\langle \partial_t^{\circ, h} \vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{U}^h, \vec{U}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\ + 2 \mu_\Gamma \left\langle D_s(\vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{U}^h), D_s(\vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{U}^h) \right\rangle_{\Gamma^h(t)} = \alpha \left\langle \vec{F}_\Gamma^h, \vec{U}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h. \end{aligned} \quad (243)$$

此外, 仿照定理 134 的证明, 对 (239e) 和 (239f) 作同样的论证, 参看 (178), 得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\left| \vec{\kappa}^h \right|_{\Gamma^h(t)}^h \right)^2 = - \left\langle \vec{F}_\Gamma^h, \vec{\mathcal{V}}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = - \left\langle \vec{F}_\Gamma^h, \vec{U}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h, \quad (244)$$

其中最后一个等号由在 (239d) 中取 $\vec{\chi} = \vec{F}_\Gamma^h(\cdot, t)$ 得到。此外, 由 (239d) 可知

$$\vec{\mathcal{V}}^h(\cdot, t) = \vec{\pi}_{\Gamma^h} \left[\vec{U}^h_{|\Gamma^h(t)} \right]. \quad (245)$$

利用这一点、定理 70(ii), 以及取 $\eta = \pi_{\Gamma^h} \left[\left| \vec{U}^h_{|\Gamma^h(t)} \right|^2 \right]$ 时的 (239c), 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle \vec{U}^h, \vec{U}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h &= \frac{1}{2} \left\langle \partial_t^{\circ, h} \vec{\pi}_{\Gamma^h} \left[\left| \vec{U}^h \right|^2 \right], 1 \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \frac{1}{2} \left\langle \nabla_s \cdot \vec{\mathcal{V}}^h, \left| \vec{U}^h \right|^2 \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\ &= \left\langle \partial_t^{\circ, h} \vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{U}^h, \vec{U}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h + \frac{1}{2} \left\langle \nabla_s \cdot (\vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{U}^h), \left| \vec{U}^h \right|^2 \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\ &= \left\langle \partial_t^{\circ, h} \vec{\pi}_{\Gamma^h} \vec{U}^h, \vec{U}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h. \end{aligned} \quad (246)$$

将 (243)、(244) 和 (246) 合并, 即得 (240)。

与 (240) 类似, 由定理 70(ii)、注记 69(i)、(245), 以及在 (239c) 中取 $\eta = \phi_k^{\Gamma^h(t)}$, 可直接得到恒等式 (241)。最后, 将对应于 $k = 1, \dots, K$ 的 (241) 相加, 便得到 (242)。□

注记 149 (自发曲率与 ADE 效应) 若 $\varkappa$ 或 β 非零, 则将半离散逼近 (239) 中的 (239f) 换为

$$\left\langle \vec{\kappa}^h + (\beta A^h(t) - \varkappa) \vec{\nu}^h - \vec{Y}^h, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h = 0 \quad \forall \vec{\xi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \quad (247a)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{F}_\Gamma^h, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h &= \left\langle \nabla_s \vec{Y}^h, \nabla_s \vec{\chi} - 2 D_s(\vec{\chi}) \right\rangle_{\Gamma^h(t)} + \left\langle \nabla_s \cdot \vec{Y}^h, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)} \\ &\quad - \left\langle \frac{1}{2} |\vec{\kappa}^h - \varkappa \vec{\nu}^h|^2 - \vec{\kappa}^h \cdot (\vec{Y}^h - \beta A^h(t) \vec{\nu}^h), \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \\ &\quad + (\beta A^h(t) - \varkappa) \left\langle \vec{\kappa}^h, (\nabla_s \vec{\chi})^\top \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h \quad \forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^h(t)), \end{aligned} \quad (247b)$$

$$A^h(t) = \left\langle \vec{\kappa}^h, \vec{\nu}^h \right\rangle_{\Gamma^h(t)}^h - M_0, \quad (247c)$$

并另求 $\vec{Y}^h \in \underline{V}(\mathcal{G}_T^h)$ 。这里沿用 (212)。结合定理 148 和定理 143 的证明, 可对系统 (239a-e)、(247) 证明定理 148 中的对应稳定性结论, 只须将 $\frac{1}{2} \left(|\vec{\kappa}^h|_{\Gamma^h(t)}^h \right)^2$ 换为 $E_{\varkappa, \beta}^h(\Gamma^h(t))$; 亦参看 Barrett et al. (2017c, 定理 4.2)。

注记 150

- (i) §8.1.4 中引入的虚拟元方法可用于半离散逼近 (239) 及其推广 (239a-e)、(247)。此时除 $\frac{d}{dt} |\Gamma^h(t)| = 0$ 外, 还得到

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^d(\Omega_-^h(t)) = 0,$$

因此, 所得逼近同时保持曲面面积和所围体积, 并满足能量恒等式。

- (ii) 恒等式 (241) 保证 $\Gamma^h(t)$ 上每个基函数的支集测度不变。在二维空间中, 若单元数或顶点数 $J = K$ 为奇数, 则这等价于每个单元的长度保持不变。特别地, 若 $\Gamma^h(0)$ 等分布, 则 $\Gamma^h(t)$ 在整个演化过程中均保持等分布。稍加修改 (239) 后, 可证明 $\Gamma^h(t)$ 上每个单元的测度保持不变, 即对于任意 $J \geq 2$ 和 $d \geq 2$, 都有 $\frac{d}{dt} \mathcal{H}^{d-1}(\sigma_j(t)) = 0, j = 1, \dots, J$, 从而也有 (242)。为此, 只须将 (239) 中的 $V(\Gamma^h(t))$ 换为 $V_c(\Gamma^h(t))$, 参看定义 43(ii); 也就是说, 对 $P_\Gamma^h(\cdot, t)$ 的试探空间, 以及 (239c) 中的测试空间, 均采用分片常数函数。不过, 当 $d \geq 3$ 时, 这一约束可能过强; 关于 $d = 3$ 时的进一步细节, 参看 Barrett et al. (2016a, 注记 4.1)。
- (iii) 逼近 (239) 及其推广 (239a-e)、(247), 均采用曲面速度与曲面压力的连续分片线性逼近, 因此不大可能满足具有与网格参数无关的常数 C 的离散 LBB 条件 (238)。事实上, 实际计算中可能出现曲面压力逼近的振荡, 参看 Barrett et al. (2016a, Fig. 5)。对此, 可在曲面上采用体区域速度的连续分片二次插值, 以得到

性质更好的曲面压力逼近。不过, 对于这样修正后的 (239) 和 (239a-e)、(247), 虽然在 $\rho_\Gamma = 0$ 时仍可证明 (240) 及其推广, 却无法再证明 (241) 和 (242)。在实际计算中, 这可能使 $d = 3$ 时的曲面面积守恒较差, 进一步细节见 Barrett et al. (2016a, 注记 4.1)。

最后, 给出 (239) 的全离散对应。设闭多面体超曲面 Γ^0 逼近 $\Gamma(0)$, 并设 $\vec{\kappa}_{\Gamma^0}^0 \in \underline{V}(\Gamma^0)$ 逼近其平均曲率向量。若 $\rho_\Gamma > 0$, 则设 $\vec{U}_{\Gamma^0}^0 \in \underline{V}(\Gamma^0)$ 逼近 $(\vec{u}_0)|_{\Gamma^0}$ 。沿用时间区间分划 (40)。对于 $m = 0, \dots, M-1$, 求 $\vec{U}^{m+1} \in \mathbb{U}^m$ 、 $P^{m+1} \in \hat{\mathbb{P}}^m$ 、 $P_\Gamma^{m+1} \in V(\Gamma^m)$ 、 $\vec{X}^{m+1} \in \underline{V}(\Gamma^m)$ 、 $\vec{\kappa}^{m+1} \in \underline{V}(\Gamma^m)$ 和 $\vec{F}_\Gamma^{m+1} \in \underline{V}(\Gamma^m)$, 使得

$$\begin{aligned} & 2 \left(\mu^m D(\vec{U}^{m+1}), D(\vec{\xi}) \right) - \left(P^{m+1}, \nabla \cdot \vec{\xi} \right) + \rho_\Gamma \left\langle \frac{\vec{U}^{m+1} - \vec{U}_{\Gamma^m}^m}{\Delta t_m}, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^m}^h \\ & + 2 \mu_\Gamma \left\langle D_s(\vec{\pi}_{\Gamma^m} \vec{U}^{m+1}), D_s(\vec{\pi}_{\Gamma^m} \vec{\xi}) \right\rangle_{\Gamma^m} - \left\langle P_\Gamma^{m+1}, \nabla_s \cdot (\vec{\pi}_{\Gamma^m} \vec{\xi}) \right\rangle_{\Gamma^m} \\ & = \alpha \left\langle \vec{F}_\Gamma^{m+1}, \vec{\xi} \right\rangle_{\Gamma^m}^h \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{U}^m, \end{aligned} \quad (248a)$$

$$\left(\nabla \cdot \vec{U}^{m+1}, \varphi \right) = 0 \quad \forall \varphi \in \hat{\mathbb{P}}^m, \quad (248b)$$

$$\left\langle \nabla_s \cdot (\vec{\pi}_{\Gamma^m} \vec{U}^{m+1}), \eta \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \eta \in V(\Gamma^m), \quad (248c)$$

$$\left\langle \frac{\vec{X}^{m+1} - \text{id}}{\Delta t_m}, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m}^h = \left\langle \vec{U}^{m+1}, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m}^h \quad \forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^m), \quad (248d)$$

$$\left\langle \vec{\kappa}^{m+1}, \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} + \left\langle \nabla_s \vec{X}^{m+1}, \nabla_s \vec{\eta} \right\rangle_{\Gamma^m} = 0 \quad \forall \vec{\eta} \in \underline{V}(\Gamma^m), \quad (248e)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \vec{F}_\Gamma^{m+1}, \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m}^h = \left\langle \nabla_s \vec{\kappa}^{m+1}, \nabla_s \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m} + \left\langle \nabla_s \cdot \vec{\kappa}_{\Gamma^m}^m, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m} \\ & + \frac{1}{2} \left\langle |\vec{\kappa}_{\Gamma^m}^m|^2, \nabla_s \cdot \vec{\chi} \right\rangle_{\Gamma^m}^h - 2 \left\langle \nabla_s \vec{\kappa}_{\Gamma^m}^m, D_s(\vec{\chi}) \right\rangle_{\Gamma^m} \quad \forall \vec{\chi} \in \underline{V}(\Gamma^m), \end{aligned} \quad (248f)$$

并置 $\Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m)$ 、 $\vec{\kappa}_{\Gamma^{m+1}}^{m+1} = \vec{\kappa}^{m+1} \circ (\vec{X}^{m+1})^{-1} \in \underline{V}(\Gamma^{m+1})$ 以及 $\vec{U}_{\Gamma^{m+1}}^{m+1} = \vec{\pi}_{\Gamma^m} \left[\vec{U}_{\Gamma^m}^{m+1} \right] \circ (\vec{X}^{m+1})^{-1} \in \underline{V}(\Gamma^{m+1})$ 。

当 α 和 β 中一个或两个非零时, 也可作类似处理。此外, 利用 §8.2 的方法, 上述逼近还可推广至体区域流动为 Navier-Stokes 流的情形。注记 150(i) 中方法的全离散对应, 在实际计算中也能保证良好的体积守恒。更多细节见 Barrett et al. (2016a, 2017c)。进一步, 若假定离散 LBB 条件 (238) 成立, 则可证明 (248)、(239a-e) 与 (247) 的相应全离散逼近, 以及以上讨论的各推广形式, 都存在唯一解。所需的方法见 Barrett et al. (2016a, 定理 5.1) 和 Barrett et al. (2017c, 定理 5.1) 的证明。最后, 由 (248) 及其推广产生的线性方程组, 可结合注记 122 和注记 145 中的方法, 用 Schur 补方法求解。更多细节见 Barrett et al. (2016a, §6) 和 Barrett et al. (2017c, §6)。

图 7 展示了将格式 (248) 推广至体区域 Navier-Stokes 流后的一个数值模拟。区

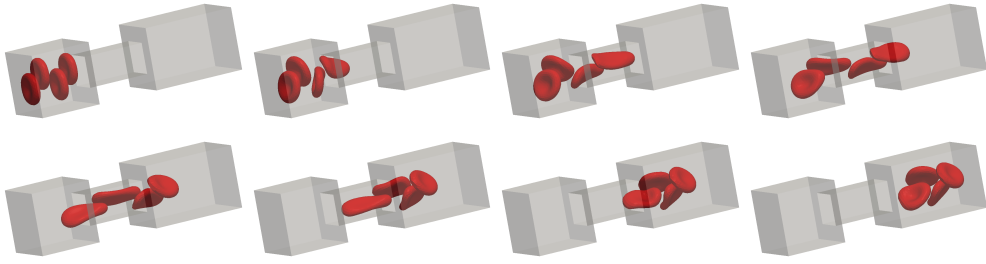


图 7: Barrett et al. (2016a, Fig. 12) 中数值实验的可视化结果。各快照对应于时刻 $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 4$ 。

域 Ω 具有狭窄部位，所选边界条件模拟 Poiseuille 型流动。

10.4 两相生物膜

也可以考察两相生物膜。此时可引入序参量 $\mathbf{c}$ ，它在两个不同的相中分别取值 ± 1 ，并与膜内某种化学组分的组成有关。在曲面上采用相场模型，通过 Ginzburg–Landau 泛函逼近界面能量：

$$\varsigma \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \varepsilon |\nabla_s \mathbf{c}|^2 + \varepsilon^{-1} \Psi(\mathbf{c}) \, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

这里 Ψ 为双阱势， $\varsigma > 0$ 与膜上两相之间的界面张力有关；在 $d = 3$ 这一特殊情形下，该张力通常称为线张力。参数 $\varepsilon > 0$ 则与两相之间弥散层的界面厚度有关。

在不同的相中， α 、 $\varkappa$ 和 α^G 取不同的值，可与 (223) 比较。将这些值插值，得到函数 $\alpha(\mathbf{c}) > 0$ 、 $\varkappa(\mathbf{c})$ 和 $\alpha^G(\mathbf{c})$ 。不考虑 ADE 效应时，总能量因而具有如下形式：

$$E(\Gamma, \mathbf{c}) = \int_{\Gamma} b(\varkappa, \mathbf{c}) + \alpha^G(\mathbf{c}) \mathcal{K} + \varsigma b_{GL}(\mathbf{c}) \, d\mathcal{H}^{d-1}, \quad (249)$$

其中

$$b(\varkappa, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{c}) (\varkappa - \varkappa(\mathbf{c}))^2 \quad \text{和} \quad b_{GL}(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \varepsilon |\nabla_s \mathbf{c}|^2 + \varepsilon^{-1} \Psi(\mathbf{c}).$$

作者在 Barrett et al. (2017b) 中将流体生物膜的动力学模型推广至不考虑 ADE 效应的两相情形。这里给出若干基本要点。此时须为膜上的组分浓度 $\mathbf{c}$ 引入适当的演化律。为此，考虑 $\Gamma(t)$ 上的如下 Cahn–Hilliard 动力学：

$$\vartheta \partial_t^\bullet \mathbf{c} = \Delta_s \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = -\varsigma \varepsilon \Delta_s \mathbf{c} + \varsigma \varepsilon^{-1} \Psi'(\mathbf{c}) + (\partial_{\mathbf{c}} b)(\varkappa, \mathbf{c}) + (\alpha^G)'(\mathbf{c}) \mathcal{K},$$

其中 $\partial_t^\bullet$ 是 (227) 定义的物质时间导数， $\mathbf{m}$ 表示化学势， $\vartheta \in \mathbb{R}_{>0}$ 是动力学系数。注意，

$\mathbf{m} = \frac{\delta}{\delta \mathbf{c}} E(\Gamma, \mathbf{c})$ 是总能量关于 $\mathbf{c}$ 的第一变分。此外，还须修改 (225b) 中的力 $\vec{f}_\Gamma$ ，以计入浓度 $\mathbf{c}$ 的影响。推广后的力由能量 (249) 关于 Γ 的负第一变分给出，即

$$\begin{aligned} \vec{f}_\Gamma &= -\frac{\delta}{\delta \Gamma} E(\Gamma, \mathbf{c}) \\ &= \left[-\Delta_s [\alpha(\mathbf{c}) (\chi - \bar{\chi}(\mathbf{c}))] - \alpha(\mathbf{c}) (\chi - \bar{\chi}(\mathbf{c})) |\nabla_s \vec{v}|^2 + b(\chi, \mathbf{c}) \chi \right. \\ &\quad \left. - \nabla_s \cdot ([\chi \text{Id} + \nabla_s \vec{v}] \nabla_s \alpha^G(\mathbf{c})) \right] \vec{v} + [(\partial_{\mathbf{c}} b)(\chi, \mathbf{c}) + (\alpha^G)'(\mathbf{c}) \mathcal{K}] \nabla_s \mathbf{c} \\ &\quad + \varsigma [b_{GL}(\mathbf{c}) \chi \vec{v} + \nabla_s b_{GL}(\mathbf{c}) - \varepsilon \nabla_s \cdot ((\nabla_s \mathbf{c}) \otimes (\nabla_s \mathbf{c}))], \end{aligned}$$

其中

$$(\partial_{\mathbf{c}} b)(\chi, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \alpha'(\mathbf{c}) (\chi - \bar{\chi}(\mathbf{c}))^2 - \alpha(\mathbf{c}) (\chi - \bar{\chi}(\mathbf{c})) \bar{\chi}'(\mathbf{c}).$$

能量密度不依赖组分浓度时没有这种情形；现在 $\vec{f}_\Gamma$ 具有切向贡献，因而产生 Marangoni 型效应。将这些方程与 (224) 和 (225) 耦合，便得到完整系统。Barrett et al. (2017b) 推导了该系统的稳定半离散形式，并给出若干数值计算，展示两个不同相的出现如何影响膜的演化。

10.5 其他数值方法

下面列举在囊泡与膜的演化中考虑局部不可压缩性或流体效应的其他工作。Bonito et al. (2011) 研究了一个流体与膜耦合的系统，其中 Willmore 能量产生的力作用于内部流动。关于膜的局部不可压缩条件，Salac and Miksis (2011); Laadhari et al. (2014); Gera and Salac (2018) 在水平集方法中加以处理，Jamet and Misbah (2007); Aland et al. (2014) 采用相场方法，Hu et al. (2014); Heintz (2015) 则采用浸入边界法。此外，Rahimi and Arroyo (2012); Rodrigues et al. (2015) 给出了只采用曲面 Stokes 系统、不考虑体区域流体运动的数值结果，其中体积守恒由整体 Lagrange 乘子保证。Arroyo et al. (2010) 在流体膜的演化中同时考虑曲面与体区域的黏性效应，其数值结果限于轴对称情形。

致 谢

作者谨向 Regensburger Universitätsstiftung Hans Vielberth 基金会的资助致以谢忱。

参考文献

著录说明 以下按原文的 Harvard 著录习惯排列。各项先按第一作者姓名的字母次序排序；同一第一作者下，先列独著及两位作者的文献，依作者姓名字母次序、继以年代排序，再列三位及以上作者的文献，仅按年代排序。书名、篇名及刊名保留原文。

- M. Agnese and R. Nürnberg. Fitted finite element discretization of two-phase Stokes flow. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 82(11):709–729, 2016.
- M. Agnese and R. Nürnberg. Fitted front tracking methods for two-phase incompressible Navier–Stokes flow: Eulerian and ALE finite element discretizations. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 2019. (to appear).
- I. Agricola and T. Friedrich. *Global Analysis: Differential Forms in Analysis, Geometry, and Physics*, volume 52 of *Graduate Studies in Mathematics*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- S. Aland, S. Egerer, J. Lowengrub, and A. Voigt. Diffuse interface models of locally inextensible vesicles in a viscous fluid. *J. Comput. Phys.*, 277:32–47, 2014.
- S. Aland, A. Hahn, C. Kahle, and R. Nürnberg. Comparative simulations of Taylor flow with surfactants based on sharp- and diffuse-interface methods. In D. Bothe and A. Reusken, editors, *Transport Processes at Fluidic Interfaces*, pages 639–679. Birkhäuser, Berlin, 2017.
- R. F. Almgren. Variational algorithms and pattern formation in dendritic solidification. *J. Comput. Phys.*, 106(2):337–354, 1993.

- L. Alvarez, F. Guichard, P.-L. Lions, and J.-M. Morel. Axioms and fundamental equations of image processing. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 123(3):199–257, 1993.
- H. Amann and J. Escher. *Analysis III*. Birkhäuser, Basel, 2009.
- M. Arroyo and A. DeSimone. Relaxation dynamics of fluid membranes. *Phys. Rev. E*, 79(3):031915, 2009.
- M. Arroyo, A. DeSimone, and L. Heltai. The role of membrane viscosity in the dynamics of fluid membranes. arXiv:1007.4934, 2010.
- E. Bänsch. Finite element discretization of the Navier–Stokes equations with a free capillary surface. *Numer. Math.*, 88(2):203–235, 2001.
- E. Bänsch and A. Schmidt. Simulation of dendritic crystal growth with thermal convection. *Interfaces Free Bound.*, 2(1):95–115, 2000.
- E. Bänsch and A. Schmidt. Free boundary problems in fluids and materials. In *Handbook of Numerical Analysis, Vol. XXI & XXII*. Elsevier, 2019. (to appear).
- E. Bänsch, P. Morin, and R. H. Nochetto. Surface diffusion of graphs: variational formulation, error analysis, and simulation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(2):773–799, 2004.
- E. Bänsch, P. Morin, and R. H. Nochetto. A finite element method for surface diffusion: the parametric case. *J. Comput. Phys.*, 203(1):321–343, 2005.
- J. W. Barrett and C. M. Elliott. A finite element method on a fixed mesh for the Stefan problem with convection in a saturated porous medium. In K. W. Morton and M. J. Baines, editors, *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, pages 389–409. Academic Press (London), 1982.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. A parametric finite element method for fourth order geometric evolution equations. *J. Comput. Phys.*, 222(1):441–462, 2007a.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. On the variational approximation of combined second and fourth order geometric evolution equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(3):1006–1041, 2007b.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. A variational formulation of anisotropic geometric evolution equations in higher dimensions. *Numer. Math.*, 109(1):1–44, 2008a.

- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. On the parametric finite element approximation of evolving hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$. *J. Comput. Phys.*, 227(9):4281–4307, 2008b.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Numerical approximation of anisotropic geometric evolution equations in the plane. *IMA J. Numer. Anal.*, 28(2):292–330, 2008c.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Parametric approximation of Willmore flow and related geometric evolution equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(1):225–253, 2008d.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Parametric approximation of surface clusters driven by isotropic and anisotropic surface energies. *Interfaces Free Bound.*, 12(2):187–234, 2010a.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Numerical approximation of gradient flows for closed curves in $\mathbb{R}^d$. *IMA J. Numer. Anal.*, 30(1):4–60, 2010b.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. On stable parametric finite element methods for the Stefan problem and the Mullins–Sekerka problem with applications to dendritic growth. *J. Comput. Phys.*, 229(18):6270–6299, 2010c.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Finite element approximation of coupled surface and grain boundary motion with applications to thermal grooving and sintering. *European J. Appl. Math.*, 21(6):519–556, 2010d.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. The approximation of planar curve evolutions by stable fully implicit finite element schemes that equidistribute. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 27(1):1–30, 2011.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Numerical computations of faceted pattern formation in snow crystal growth. *Phys. Rev. E*, 86(1):011604, 2012a.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Parametric approximation of isotropic and anisotropic elastic flow for closed and open curves. *Numer. Math.*, 120(3):489–542, 2012b.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Elastic flow with junctions: Variational approximation and applications to nonlinear splines. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 22(11):1250037, 2012c.

- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Finite element approximation of one-sided Stefan problems with anisotropic, approximately crystalline, Gibbs–Thomson law. *Adv. Differential Equations*, 18(3-4):383–432, 2013a.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. On the stable discretization of strongly anisotropic phase field models with applications to crystal growth. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 93(10-11):719–732, 2013b.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Eliminating spurious velocities with a stable approximation of viscous incompressible two-phase Stokes flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 267:511–530, 2013c.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Phase field models versus parametric front tracking methods: Are they accurate and computationally efficient? *Commun. Comput. Phys.*, 15(2):506–555, 2014a.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Stable phase field approximations of anisotropic solidification. *IMA J. Numer. Anal.*, 34(4):1289–1327, 2014b.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Stable numerical approximation of two-phase flow with a Boussinesq–Scriven surface fluid. *Commun. Math. Sci.*, 13(7):1829–1874, 2015a.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. A stable parametric finite element discretization of two-phase Navier–Stokes flow. *J. Sci. Comp.*, 63(1):78–117, 2015b.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Numerical computations of the dynamics of fluidic membranes and vesicles. *Phys. Rev. E*, 92(5):052704, 2015c.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Stable finite element approximations of two-phase flow with soluble surfactant. *J. Comput. Phys.*, 297:530–564, 2015d.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. On the stable numerical approximation of two-phase flow with insoluble surfactant. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 49(2):421–458, 2015e.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. A stable numerical method for the dynamics of fluidic biomembranes. *Numer. Math.*, 134(4):783–822, 2016a.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Computational parametric Willmore flow with spontaneous curvature and area difference elasticity effects. *SIAM J. Numer. Anal.*, 54(3):1732–1762, 2016b.

- J. W. Barrett, K. Deckelnick, and V. Styles. Numerical analysis for a system coupling curve evolution to reaction diffusion on the curve. *SIAM J. Numer. Anal.*, 55(2):1080–1100, 2017a.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Finite element approximation for the dynamics of fluidic two-phase biomembranes. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 51(6):2319–2366, 2017b.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Finite element approximation for the dynamics of asymmetric fluidic biomembranes. *Math. Comp.*, 86(305):1037–1069, 2017c.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Stable variational approximations of boundary value problems for Willmore flow with Gaussian curvature. *IMA J. Numer. Anal.*, 37(4):1657–1709, 2017d.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Gradient flow dynamics of two-phase biomembranes: Sharp interface variational formulation and finite element approximation. *SMAI J. Comput. Math.*, 4:151–195, 2018.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Variational discretization of axisymmetric curvature flows. *Numer. Math.*, 141(3):791–837, 2019a.
- J. W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. Finite element methods for fourth order axisymmetric geometric evolution equations. *J. Comput. Phys.*, 376:733–766, 2019b.
- S. Bartels. Finite element simulation of nonlinear bending models for thin elastic rods and plates. In *Handbook of Numerical Analysis, Vol. XXI & XXII*. Elsevier, 2019. (to appear).
- S. Bartels, G. Dolzmann, R. H. Nochetto, and A. Raisch. Finite element methods for director fields on flexible surfaces. *Interfaces Free Bound.*, 14(2):231–272, 2012.
- A. Bartezzaghi, L. Dedè, and A. Quarteroni. Biomembrane modeling with isogeometric analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 347:103–119, 2019.
- L. Beirão da Veiga, F. Brezzi, A. Cangiani, G. Manzini, L. D. Marini, and A. Russo. Basic principles of virtual element methods. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 23(1):199–214, 2013.
- G. Bellettini, M. Novaga, and M. Paolini. Facet-breaking for three-dimensional crystals evolving by mean curvature. *Interfaces Free Bound.*, 1(1):39–55, 1999.

- M. Beneš. Diffuse-interface treatment of the anisotropic mean-curvature flow. *Appl. Math.*, 48(6):437–453, 2003.
- A. I. Bobenko and P. Schröder. Discrete Willmore flow. In J. Fujii, editor, *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, SIGGRAPH '05, New York, NY, 2005. ACM.
- D. Boffi. Three-dimensional finite element methods for the Stokes problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(2):664–670, 1997.
- A. Bonito, R. H. Nochetto, and M. S. Pauletti. Parametric FEM for geometric biomembranes. *J. Comput. Phys.*, 229(9):3171–3188, 2010.
- A. Bonito, R. H. Nochetto, and M. S. Pauletti. Dynamics of biomembranes: effect of the bulk fluid. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 6(5):25–43, 2011.
- A. Bonito, A. Demlow, and R. H. Nochetto. Finite element methods for the Laplace–Beltrami operator. In *Handbook of Numerical Analysis, Vol. XXI & XXII*. Elsevier, 2019. (to appear).
- D. Bothe and J. Prüss. On the two-phase Navier–Stokes equations with Boussinesq–Scriven surface fluid. *J. Math. Fluid Mech.*, 12(1):133–150, 2010.
- E. Bretin, S. Masnou, and E. Oudet. Phase-field approximations of the Willmore functional and flow. *Numer. Math.*, 131(1):115–171, 2015.
- M. Burger. Numerical simulation of anisotropic surface diffusion with curvature-dependent energy. *J. Comput. Phys.*, 203(2):602–625, 2005.
- M. Burger, F. Haußer, C. Stöcker, and A. Voigt. A level set approach to anisotropic flows with curvature regularization. *J. Comput. Phys.*, 225(1):183–205, 2007.
- G. Caginalp and J.-T. Lin. A numerical analysis of an anisotropic phase field model. *IMA J. Appl. Math.*, 39(1):51–66, 1987.
- J. W. Cahn and J. E. Taylor. Surface motion by surface diffusion. *Acta Metall. Mater.*, 42(4):1045–1063, 1994.
- P. B. Canham. The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell. *J. Theor. Biol.*, 26(1):61–81, 1970.
- P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.

- CIBC, 2016. Cleaver: A MultiMaterial Tetrahedral Meshing Library and Application. Scientific Computing and Imaging Institute (SCI), Download from: www.sci.utah.edu/cibc/software.
- U. Clarenz, U. Diewald, G. Dziuk, M. Rumpf, and R. Rusu. A finite element method for surface restoration with smooth boundary conditions. *Comput. Aided Geom. Design*, 21(5):427–445, 2004.
- U. Clarenz, F. Haußer, M. Rumpf, A. Voigt, and U. Weikard. On level set formulations for anisotropic mean curvature flow and surface diffusion. In *Multiscale Modeling in Epitaxial Growth*, volume 149 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 227–237. Birkhäuser, Basel, 2005.
- B. D. Coleman, R. S. Falk, and M. Moakher. Space-time finite element methods for surface diffusion with applications to the theory of the stability of cylinders. *SIAM J. Sci. Comput.*, 17(6):1434–1448, 1996.
- T. A. Davis. Algorithm 832: UMFPACK V4.3—an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Trans. Math. Software*, 30(2):196–199, 2004.
- T. A. Davis. Algorithm 915, SuiteSparseQR: Multifrontal multithreaded rank-revealing sparse QR factorization. *ACM Trans. Math. Software*, 38(1):1–22, 2011.
- J.-M. Debievre, A. Karma, F. Celestini, and R. Guérin. Phase-field approach for faceted solidification. *Phys. Rev. E*, 68(4):041604, 2003.
- K. Deckelnick and G. Dziuk. On the approximation of the curve shortening flow. In C. Bandle, J. Bemelmans, M. Chipot, J. S. J. Paulin, and I. Shafrir, editors, *Calculus of Variations, Applications and Computations (Pont-à-Mousson, 1994)*, volume 326 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 100–108. Longman Sci. Tech., Harlow, 1995.
- K. Deckelnick and G. Dziuk. Discrete anisotropic curvature flow of graphs. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(6):1203–1222, 1999.
- K. Deckelnick and G. Dziuk. Error analysis of a finite element method for the Willmore flow of graphs. *Interfaces Free Bound.*, 8(1):21–46, 2006.
- K. Deckelnick and G. Dziuk. Error analysis for the elastic flow of parametrized curves. *Math. Comp.*, 78(266):645–671, 2009.
- K. Deckelnick and F. Schieweck. Error analysis for the approximation of axisymmetric Willmore flow by C^1 -finite elements. *Interfaces Free Bound.*, 12(4):551–574, 2010.

- K. Deckelnick, G. Dziuk, and C. M. Elliott. Error analysis of a semidiscrete numerical scheme for diffusion in axially symmetric surfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(6):2161–2179, 2003.
- K. Deckelnick, G. Dziuk, and C. M. Elliott. Computation of geometric partial differential equations and mean curvature flow. *Acta Numer.*, 14:139–232, 2005a.
- K. Deckelnick, G. Dziuk, and C. M. Elliott. Fully discrete finite element approximation for anisotropic surface diffusion of graphs. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(3):1112–1138, 2005b.
- K. Deckelnick, J. Katz, and F. Schieweck. A C^1 -finite element method for the Willmore flow of two-dimensional graphs. *Math. Comp.*, 84(296):2617–2643, 2015.
- A. Dedner, R. Klöforn, M. Nolte, and M. Ohlberger. A generic interface for parallel and adaptive discretization schemes: abstraction principles and the DUNE-FEM module. *Computing*, 90(3–4):165–196, 2010.
- D. M. DeTurck. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. *J. Differential Geom.*, 18(1):157–162, 1983.
- M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1976.
- M. Droske and M. Rumpf. A level set formulation for Willmore flow. *Interfaces Free Bound.*, 6(3):361–378, 2004.
- Q. Du and X. Feng. The phase field method for geometric moving interfaces and their numerical approximations. In *Handbook of Numerical Analysis, Vol. XXI & XXII*. Elsevier, 2019. (to appear).
- Q. Du, C. Liu, R. Ryham, and X. Wang. A phase field formulation of the Willmore problem. *Nonlinearity*, 18(3):1249–1267, 2005.
- G. Dziuk. An algorithm for evolutionary surfaces. *Numer. Math.*, 58(6):603–611, 1991.
- G. Dziuk. Convergence of a semi-discrete scheme for the curve shortening flow. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 4(4):589–606, 1994.
- G. Dziuk. Discrete anisotropic curve shortening flow. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(6):1808–1830, 1999a.
- G. Dziuk. Numerical schemes for the mean curvature flow of graphs. In *Variations of domain and free-boundary problems in solid mechanics (Paris, 1997)*, volume 66 of *Solid Mech. Appl.*, pages 63–70. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999b.

- G. Dziuk. Computational parametric Willmore flow. *Numer. Math.*, 111(1):55–80, 2008.
- G. Dziuk and C. M. Elliott. Finite element methods for surface PDEs. *Acta Numer.*, 22:289–396, 2013.
- G. Dziuk, E. Kuwert, and R. Schätzle. Evolution of elastic curves in $\mathbb{R}^n$: Existence and computation. *SIAM J. Math. Anal.*, 33(5):1228–1245, 2002.
- C. Eck, H. Garcke, and P. Knabner. *Mathematical modeling*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, Cham, 2017.
- C. M. Elliott and H. Fritz. On approximations of the curve shortening flow and of the mean curvature flow based on the DeTurck trick. *IMA J. Numer. Anal.*, 37(2):543–603, 2017.
- C. M. Elliott and H. Garcke. Diffusional phase transitions in multicomponent systems with a concentration dependent mobility matrix. *Phys. D*, 109(3–4):242–256, 1997.
- C. M. Elliott and B. Stinner. Modeling and computation of two phase geometric biomembranes using surface finite elements. *J. Comput. Phys.*, 229(18):6585–6612, 2010.
- C. M. Elliott and B. Stinner. Computation of two-phase biomembranes with phase dependent material parameters using surface finite elements. *Commun. Comput. Phys.*, 13(2):325–360, 2013.
- H. C. Elman, D. J. Silvester, and A. J. Wathen. *Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2005.
- J. Escher, Y. Giga, and K. Ito. On a limiting motion and self-intersections of curves moved by the intermediate surface diffusion flow. *Nonlinear Anal.*, 47(6):3717–3728, 2001.
- S. Esedoğlu, A. Rätz, and M. Röger. Colliding interfaces in old and new diffuse-interface approximations of Willmore-flow. *Commun. Math. Sci.*, 12(1):125–147, 2014.
- M. Gage and R. S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geom.*, 23(1):69–96, 1986.
- S. Ganesan and L. Tobiska. Arbitrary Lagrangian–Eulerian finite-element method for computation of two-phase flows with soluble surfactants. *J. Comput. Phys.*, 231(9):3685–3702, 2012.

- S. Ganesan, G. Matthies, and L. Tobiska. On spurious velocities in incompressible flow problems with interfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(7):1193–1202, 2007.
- H. Garcke. Curvature driven interface evolution. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 115(2): 63–100, 2013.
- H. Garcke, B. Stoth, and B. Nestler. Anisotropy in multi-phase systems: a phase field approach. *Interfaces Free Bound.*, 1(2):175–198, 1999.
- H. Garcke, M. Hinze, and C. Kahle. A stable and linear time discretization for a thermodynamically consistent model for two-phase incompressible flow. *Appl. Numer. Math.*, 99:151–171, 2016.
- P. Gera and D. Salac. Modeling of multicomponent three-dimensional vesicles. *Comput. & Fluids*, 172:362–383, 2018.
- C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 79(11):1309–1331, 2009.
- Y. Giga. *Surface evolution equations*, volume 99 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, Basel, 2006.
- D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, volume 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983.
- V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier–Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- C. Gräser, R. Kornhuber, and U. Sack. Time discretizations of anisotropic Allen–Cahn equations. *IMA J. Numer. Anal.*, 33(4):1226–1244, 2013.
- J. Gravner and D. Griffeath. Modeling snow-crystal growth: A three-dimensional mesoscopic approach. *Phys. Rev. E*, 79(1):011601–1–18, 2009.
- S. Groß and A. Reusken. *Numerical methods for two-phase incompressible flows*, volume 40 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2011.

- G. Grün and F. Klingbeil. Two-phase flow with mass density contrast: Stable schemes for a thermodynamic consistent and frame-indifferent diffuse-interface model. *J. Comput. Phys.*, 257:708–725, 2014.
- F. Haußer and A. Voigt. A discrete scheme for regularized anisotropic surface diffusion: a 6th order geometric evolution equation. *Interfaces Free Bound.*, 7(4):353–369, 2005.
- C.-J. Heine. Isoparametric finite element approximation of curvature on hypersurfaces, 2004. Preprint, University Freiburg.
- A. Heintz. A numerical method for simulation dynamics of incompressible lipid membranes in viscous fluid. *J. Comput. Appl. Math.*, 289:87–100, 2015.
- W. Helfrich. Elastic properties of lipid bilayers: Theory and possible experiments. *Z. Naturforsch. C*, 28(11–12):693–703, 1973.
- K. Hildebrandt, K. Polthier, and M. Wardetzky. On the convergence of metric and geometric properties of polyhedral surfaces. *Geom. Dedicata*, 123(1):89–112, 2006.
- M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, and S. Ulbrich. *Optimization with PDE constraints*, volume 23 of *Mathematical Modelling: Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York, 2009.
- C. W. Hirt and B. D. Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.*, 39(1):201–225, 1981.
- T. Y. Hou, J. S. Lowengrub, and M. J. Shelley. Removing the stiffness from interfacial flows with surface tension. *J. Comput. Phys.*, 114(2):312–338, 1994.
- W.-F. Hu, Y. Kim, and M.-C. Lai. An immersed boundary method for simulating the dynamics of three-dimensional axisymmetric vesicles in Navier–Stokes flows. *J. Comput. Phys.*, 257:670–686, 2014.
- G. Huisken. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *J. Differential Geom.*, 20(1):237–266, 1984.
- A. J. James and J. Lowengrub. A surfactant-conserving volume-of-fluid method for interfacial flows with insoluble surfactant. *J. Comput. Phys.*, 201(2):685–722, 2004.
- D. Jamet and C. Misbah. Towards a thermodynamically consistent picture of the phase-field model of vesicles: Local membrane incompressibility. *Phys. Rev. E*, 76(5):051907, 2007.

- D. Juric and G. Tryggvason. A front-tracking method for dendritic solidification. *J. Comput. Phys.*, 123(1):127–148, 1996.
- A. Karma and W.-J. Rappel. Quantitative phase-field modeling of dendritic growth in two and three dimensions. *Phys. Rev. E*, 57(4):4323–4349, Apr 1998.
- D. Kay, V. Styles, and R. Welford. Finite element approximation of a Cahn–Hilliard–Navier–Stokes system. *Interfaces Free Bound.*, 10(1):15–43, 2008.
- D. A. Kessler, J. Koplik, and H. Levine. Numerical simulation of two-dimensional snowflake growth. *Phys. Rev. A*, 30(5):2820–2823, Nov 1984.
- J. Kim, K. Kang, and J. Lowengrub. Conservative multigrid methods for Cahn–Hilliard fluids. *J. Comput. Phys.*, 193(2):511–543, 2004.
- M. Kimura. Accurate numerical scheme for the flow by curvature. *Appl. Math. Lett.*, 7(1):69–73, 1994.
- R. Kobayashi. Modeling and numerical simulations of dendritic crystal growth. *Phys. D*, 63(3–4):410–423, 1993.
- M. Köhne and D. Lengeler. Local well-posedness for relaxational fluid vesicle dynamics. *J. Evol. Equ.*, 18(4):1787–1818, 2018.
- B. Kovács, B. Li, and C. Lubich. A convergent evolving finite element algorithm for mean curvature flow of closed surfaces. *Numer. Math.*, 143(4):797–853, 2019.
- W. Kühnel. *Differential Geometry: Curves – Surfaces – Manifolds*, volume 77 of *Student Mathematical Library*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- A. Laadhari, P. Saramito, and C. Misbah. Computing the dynamics of biomembranes by combining conservative level set and adaptive finite element methods. *J. Comput. Phys.*, 263:328–352, 2014.
- D. Lengeler. On a Stokes-type system arising in fluid vesicle dynamics. arXiv:1506.08991, 2015.
- D. Lengeler. Asymptotic stability of local Helfrich minimizers. *Interfaces Free Bound.*, 20(4):533–550, 2018.
- K. G. Libbrecht. The physics of snow crystals. *Rep. Progr. Phys.*, 68(4):855–895, 2005.
- K. G. Libbrecht. Physically derived rules for simulating faceted crystal growth using cellular automata. arXiv:0807.2616, 2008.

- C. Mantegazza. *Lecture notes on mean curvature flow*, volume 290 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
- S. V. Matveev. *Lectures on algebraic topology*. EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society, Zürich, 2006.
- U. F. Mayer and G. Simonett. A numerical scheme for axisymmetric solutions of curvature-driven free boundary problems, with applications to the Willmore flow. *Interfaces Free Bound.*, 4(1):89–109, 2002.
- K. Mikula and D. Ševčovič. Evolution of plane curves driven by a nonlinear function of curvature and anisotropy. *SIAM J. Appl. Math.*, 61(5):1473–1501, 2001.
- K. Mikula, M. Remešíková, P. Sarkoci, and D. Ševčovič. Manifold evolution with tangential redistribution of points. *SIAM J. Sci. Comput.*, 36(4):1384–1414, 2014.
- W. W. Mullins. Theory of thermal grooving. *J. Appl. Phys.*, 28(3):333–339, 1957.
- B. Nestler. A 3D parallel simulator for crystal growth and solidification in complex alloy systems. *J. Cryst. Growth*, 275(1-2):e273–e278, 2005.
- J. C. C. Nitsche. Boundary value problems for variational integrals involving surface curvatures. *Quart. Appl. Math.*, 51(2):363–387, 1993.
- Z. Pan. *Simulation and Analysis of Coupled Surface and Grain Boundary Motion*. PhD thesis, University of British Columbia, Vancouver, 2008.
- Z. Pan and B. Wetton. A numerical method for coupled surface and grain boundary motion. *European J. Appl. Math.*, 19(3):311–327, 2008.
- P. Pozzi. Anisotropic curve shortening flow in higher codimension. *Math. Methods Appl. Sci.*, 30(11):1243–1281, 2007.
- P. Pozzi. Anisotropic mean curvature flow for two dimensional surfaces in higher codimension: a numerical scheme. *Interfaces Free Bound.*, 10(4):539–576, 2008.
- J. Prüss and G. Simonett. *Moving interfaces and quasilinear parabolic evolution equations*, volume 105 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser/Springer, 2016.
- M. Rahimi and M. Arroyo. Shape dynamics, lipid hydrodynamics, and the complex viscoelasticity of bilayer membranes. *Phys. Rev. E*, 86(1):011932, 2012.
- C. A. Reiter. A local cellular model for snow crystal growth. *Chaos Soliton. Fract.*, 23(4):1111–1119, 2005.

- Y. Renardy and M. Renardy. PROST: a parabolic reconstruction of surface tension for the volume-of-fluid method. *J. Comput. Phys.*, 183(2):400–421, 2002.
- L. Rineau and M. Yvinec. 3D surface mesh generation. In *CGAL 4.14.1 User and Reference Manual*. CGAL Editorial Board, 2019.
- D. S. Rodrigues, R. F. Ausas, F. Mut, and G. C. Buscaglia. A semi-implicit finite element method for viscous lipid membranes. *J. Comput. Phys.*, 298:565–584, 2015.
- A. R. Roosen and J. E. Taylor. Simulation of crystal growth with faceted interfaces. *Mater. Res. Soc. Symp. Proc.*, 237:25–36, 1991.
- R. E. Rusu. An algorithm for the elastic flow of surfaces. *Interfaces Free Bound.*, 7(3):229–239, 2005.
- D. Salac and M. Miksis. A level set projection model of lipid vesicles in general flows. *J. Comput. Phys.*, 230(22):8192–8215, 2011.
- G. Sapiro and A. Tannenbaum. On affine plane curve evolution. *J. Funct. Anal.*, 119(1):79–120, 1994.
- R. I. Saye and J. A. Sethian. A review of level set methods to model interfaces moving under complex physics: Recent challenges and advances. In *Handbook of Numerical Analysis, Vol. XXI & XXII*. Elsevier, 2019. (to appear).
- A. Schmidt. *Die Berechnung dreidimensionaler Dendriten mit Finiten Elementen*. PhD thesis, University Freiburg, Freiburg, 1993.
- A. Schmidt. Computation of three dimensional dendrites with finite elements. *J. Comput. Phys.*, 195(2):293–312, 1996.
- A. Schmidt. Approximation of crystalline dendrite growth in two space dimensions. In J. Kačur and K. Mikula, editors, *Proceedings of the Algoritmy’97 Conference on Scientific Computing (Zuberec)*, volume 67, pages 57–68, Bratislava, 1998. Slovak University of Technology.
- A. Schmidt and K. G. Siebert. *Design of Adaptive Finite Element Software: The Finite Element Toolbox ALBERTA*, volume 42 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- J. Schöberl. NETGEN: An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules. *Comput. Vis. Sci.*, 1(1):41–52, 1997.

- L. E. Scriven. Dynamics of a fluid interface: Equation of motion for Newtonian surface fluids. *Chem. Eng. Sci.*, 12(2):98–108, 1960.
- U. Seifert. Configurations of fluid membranes and vesicles. *Adv. Phys.*, 46(1):13–137, 1997.
- J. A. Sethian. Curvature and the evolution of fronts. *Comm. Math. Phys.*, 101(4):487–499, 1985.
- J. A. Sethian and J. Strain. Crystal growth and dendritic solidification. *J. Comput. Phys.*, 98(2):231–253, 1992.
- J. C. Slattery, L. Sagis, and E.-S. Oh. *Interfacial transport phenomena*. Springer, New York, second edition, 2007.
- J. Strain. A boundary integral approach to unstable solidification. *J. Comput. Phys.*, 85(2):342–389, 1989.
- M. Sussman, P. Semerka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, 114(1):146–159, 1994.
- J. E. Taylor and J. W. Cahn. Linking anisotropic sharp and diffuse surface motion laws via gradient flows. *J. Statist. Phys.*, 77(1-2):183–197, 1994.
- J. E. Taylor, J. W. Cahn, and C. A. Handwerker. Geometric models of crystal growth. *Acta Metall. Mater.*, 40(7):1443–1474, 1992.
- R. Temam. *Navier–Stokes Equations*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- S. Torabi, J. Lowengrub, A. Voigt, and S. Wise. A new phase-field model for strongly anisotropic systems. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 465(2105):1337–1359, 2009.
- F. Tröltzsch. *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications*, volume 112 of *Graduate Studies in Mathematics*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- G. Tryggvason, B. Bunner, A. Esmaeeli, D. Juric, N. Al-Rawahi, W. Tauber, J. Han, S. Nas, and Y.-J. Jan. A front-tracking method for the computations of multiphase flow. *J. Comput. Phys.*, 169(2):708–759, 2001.
- S. Turek and O. Mierka. Numerical simulation and benchmarking of drops and bubbles. In *Handbook of Numerical Analysis, Vol. XXI & XXII*. Elsevier, 2019. (to appear).

- S. O. Unverdi and G. Tryggvason. A front-tracking method for viscous, incompressible multi-fluid flows. *J. Comput. Phys.*, 100(1):25–37, 1992.
- S. W. Walker. Tetrahedralization of isosurfaces with guaranteed-quality by edge rearrangement (TIGER). *SIAM J. Sci. Comput.*, 35(1):294–326, 2013.
- S. W. Walker. *The Shapes of Things: A Practical Guide to Differential Geometry and the Shape Derivative*, volume 28 of *Advances in Design and Control*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2015.
- S. W. Walker. FELICITY: A MATLAB/C++ toolbox for developing finite element methods and simulation modeling. *SIAM J. Sci. Comput.*, 40(2):234–257, 2018.
- A. A. Wheeler, B. T. Murray, and R. J. Schaefer. Computation of dendrites using a phase field model. *Phys. D*, 66(1-2):243–262, 1993.
- J. Wloka. *Partial differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- E. Yokoyama. Formation of patterns during growth of snow crystals. *J. Cryst. Growth*, 128(1–4):251–257, 1993.
- E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. IV*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Applications to mathematical physics.

符号索引

数学符号按外观（字母）顺序排序；页码均指本译本。

$[\cdot]_-^+$, 23
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$, 30
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma^h}^h$, 30
 $|\Gamma|_\gamma$, 71
 $|\cdot|_\Gamma$, 30
 $|\cdot|_{\Gamma^h}^h$, 31
 A_{Γ^m} , 48
 β , 72, 120
 $\mathfrak{c}$, 140
 D_s , 5
 Δ_s , 5
 Δ_s^h , 37
 Δt_m , 46
 $\mathfrak{F}$, 62
 g_{ij}, g^{ij}, g , 7
 Γ , 3
 $\Gamma(t)$, 16
 Γ^h , 29
 Γ^m , 47
 G_ℓ , 74
 $\tilde{G}_\ell$, 74
 $\mathcal{G}_T$, 16
 $\mathcal{G}_T^h$, 40
 γ , 71
 γ' , 71
 γ^* , 73
 $\mathcal{H}^n$, 13
 $\mathbb{I}$, 8

$\varkappa$, 8
 $\bar{\varkappa}$, 8
 $\varkappa_\gamma$, 71
 $\bar{\varkappa}$, 120
 κ , 38, 83
 $\bar{\kappa}^h$, 37
 $\mathcal{K}$, 8
 λ , 121
 $\mathcal{L}^n$, 13
 $\bar{\mu}$, 14
 μ , 121
 $\mu_\pm$, 93
 μ_Γ , 130
 M_{Γ^m} , 48
 M_0 , 120
 $\mathfrak{m}$, 140
 ∇_s , 4
 $\nabla_s \cdot$, 4
 ∇_s^2 , 5
 $\nabla_s \tilde{G}_\ell$, 75
 $N_{\bar{p}}\Gamma$, 3
 $\bar{\nu}$, 5
 $\bar{\nu}^h$, 31
 $\tilde{N}_{\Gamma^m}$, 48
 $\bar{\omega}^h$, 32
 $\Omega_\pm(t)$, 21
 p , 93
 $\partial\Gamma$, 13
 ∂_t° , 18
 $\partial_t^{\circ, h}$, 41

$\partial_t^\square$, 18
 $\partial_t^\bullet$, 131
 π_{Γ^h} , 30
 P_Γ , 5
 $\mathbb{P}^m$, 96
 ϕ_k^h , 30
 $\vec{q}_k$, 30
 Q_θ^m , 68
 $\rho_\pm$, 93
 ρ_Γ , 130
 σ_j , 30
 S^m , 83
 σ , 94
 σ_Γ , 131
 $T_{\bar{p}}\Gamma$, 3
 $\vec{u}$, 93
 U , 83
 $\mathbb{U}^m$, 96
 $\vec{\nu}, \nu$, 16
 $\vec{\nu}_T$, 17
 $V(\Gamma^h)$, 30
 $\underline{V}(\Gamma^h)$, 30
 $V_c(\Gamma^h)$, 30
 $V^h(\mathbb{I}), \underline{V}^h(\mathbb{I})$, 32
 $W_{\bar{p}}$, 8
 $\vec{x}$, 17
 $\bar{X}$, 38, 83
 $\bar{X}^{m+1}$, 47
 $\vec{\bar{x}}$, 3

名词索引暨英译

中文名词按汉语拼音排序, 拉丁人名按其拼写排序; 页码均指本译本。

B

半离散 (semidiscrete), 51, 61, 79, 85, 99, 110, 136
表面扩散 (surface diffusion), 59, 72
表面能 (surface energy), 1, 71, 85
表面张力 (surface tension), 93
不动点型迭代 (fixed-point iteration), 79
不可压缩 (incompressible), 93, 129

C

Cahn-Hilliard 动力学 (Cahn-Hilliard dynamics), 140
Cahn-Hoffmann 向量 (Cahn-Hoffmann vector), 72
参数有限元 (parametric finite elements), 1, 29, 54, 69, 93
超曲面 (hypersurface), 3, 29, 45, 59, 71, 81, 93, 109, 129
存在唯一性 (existence and uniqueness), 50, 60, 77, 88

D

等分布 (equidistribution), 37, 54, 65, 79, 99, 138
等周问题 (isoperimetric problem), 72
DeTurck 技巧 (DeTurck trick), 58
第二基本形式 (second fundamental form), 8
顶点法向量 (vertex normal), 32, 49
动力学系数 (kinetic coefficient), 72, 86, 140
多边形曲线 (polygonal curve), 29
多面体曲面 (polyhedral surface), 29, 51, 62, 96

F

法空间 (normal space), 4
方向导数 (directional derivative), 4
法向速度 (normal velocity), 16, 45

非拟合有限元 (unfitted finite elements), 1, 89, 96
分部积分 (integration by parts), 14
分片线性 (piecewise linear), 30, 48, 69, 76, 128, 138
Frank 图 (Frank diagram), 73

G

Gauss-Bonnet 定理 (Gauss-Bonnet theorem), 27, 127, 130
Gauss-Green 公式 (Gauss-Green formula), 15
Gauss 曲率 (Gauss curvature), 9, 127, 129
各向异性 (anisotropy), 58, 71, 85
Gibbs-Thomson 律 (Gibbs-Thomson law), 85
共形多面体曲面 (conformal polyhedral surface), 52, 62, 101
共轭梯度 (conjugate gradient), 49, 79, 85

H

Hausdorff 测度 (Hausdorff measure), 14
Helfrich 流 (Helfrich flow), 121

J

加权平均曲率 (weighted mean curvature), 72
接触角 (contact angle), 47
晶体型表面能 (crystalline surface energy), 73
局部参数化 (local parameterization), 3
均分 (equipartition), 51

K

可定向 (orientable), 4, 31, 46, 71, 109
扩展有限元 (extended finite elements (XFEM)), 101

L

Lagrange 乘子 (Lagrange multiplier), 104, 114, 141
 Laplace–Beltrami 算子 (Laplace–Beltrami operator), 5, 37, 73
 LBB 条件 (LBB condition), 96, 138
 两相流 (two-phase flow), 1, 93, 136
 流体膜 (fluidic membrane), 141

M

面积差弹性 (area difference elasticity), 120, 129
 Mullins–Sekerka 问题 (Mullins–Sekerka problem), 81

N

Navier–Stokes 流 (Navier–Stokes flow), 104, 130
 能量耗散 (energy dissipation), 51
 凝固 (solidification), 1, 91

P

平均曲率 (mean curvature), 1, 8, 37, 45, 63, 72, 87, 102, 110, 139
 平均曲率流 (mean curvature flow), 1, 45, 63, 72, 87
 平均曲率向量 (mean curvature vector), 8, 73, 118, 139

Q

前沿追踪 (front tracking), 1, 91
 切空间 (tangent space), 3, 34, 48, 131
 切向速度 (tangential velocity), 17, 57, 94, 134
 切向运动 (tangential motion), 52, 65, 79, 88, 111
 全离散 (fully discrete), 52, 62, 79, 85, 93, 111, 139
 曲面 (surface), 1, 3, 29, 45, 59, 71, 81, 93, 109, 129
 曲面 Hessian 矩阵 (surface Hessian), 5
 曲面 Jacobian 矩阵 (surface Jacobian), 4, 75
 曲面剪切黏度 (surface shear viscosity), 131
 曲面散度 (surface divergence), 4, 75
 曲面梯度 (surface gradient), 4, 46, 75

R

Reynolds 输运定理 (Reynolds transport theorem), 22
 Riemann 度量 (Riemannian metric), 73
 弱形式 (weak formulation), 46, 74, 82, 94, 111, 134

S

散度定理 (divergence theorem), 3, 42, 59, 72, 95, 132
 三角剖分 (triangulation), 31, 48, 83
 Schur 补 (Schur complement), 49, 79, 85, 99, 139
 生物膜 (biomembranes), 1, 119, 129
 水平集法 (level set method), 1, 80, 107
 输运定理 (transport theorem), 20, 42, 45, 59, 72, 82, 95, 131
 Stefan 问题 (Stefan problem), 85
 Stokes 流 (Stokes flow), 93, 130

T

梯度流 (gradient flow), 1, 45, 60, 109
 体积守恒 (volume conservation), 61, 85, 93, 139
 体区域 (bulk domain), 1, 81, 96, 129

W

Weingarten 映射 (Weingarten map), 8, 39, 110
 Willmore 泛函 (Willmore functional), 1
 Willmore 流 (Willmore flow), 1, 80, 109
 Willmore 能量 (Willmore energy), 1, 109, 141
 无滑移 (no-slip), 106, 130
 Wulff 形状 (Wulff shape), 72, 89
 无条件稳定性 (unconditional stability), 106
 物质导数 (material derivative), 18, 40

X

相场法 (phase field method), 1, 80
 形变率张量 (rate-of-deformation tensor), 17, 94, 111, 131

Y

压力 (pressure), 93, 131
 有符号距离函数 (signed distance function), 11
 余法向量 (conormal), 14, 29, 47, 127

Z

正交投影 (orthogonal projection), 5
 整体参数化 (global parameterization), 17, 41, 46, 75, 82, 95, 111, 132
 质量集中 (mass lumping), 30, 56, 69, 114
 主曲率 (principal curvatures), 8, 129
 自发曲率 (spontaneous curvature), 119, 129
 自由边界 (free boundary), 93, 127
 自由滑移 (free-slip), 106